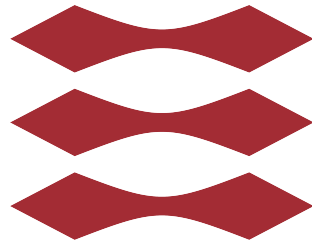


DTU



Matrixalgebra og determinanter

01001

Mathematics 1a (Polytechnical Foundation)

Date: 06 December 2025

Semester: 2025 Fall

Rasmus Rosendahl-Kaa (S255955)

Matrix

$\underline{\underline{A}}$ - en matrix

$\underline{v}$ - en vektor

Har en matrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n} \quad (1)$$

Søjlevektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times 1} = \mathbb{F}^m \quad (2)$$

Rækkevektor:

$$[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \in \mathbb{F}^{1 \times n} \quad (3)$$

Definition (Addition af vektorer)

To vektorer $\underline{a}$ og $\underline{b}$: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

Definition (Skalar af vektor)

Har en vektor $\underline{a}$: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ og en skalar $c \in \mathbb{F}$:

$$c \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot c \\ \vdots \\ a_m \cdot c \end{bmatrix} \quad (5)$$

Definition (Lineær kombination af vektor)

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{F}^m$ og $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$

$$c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + c_n \cdot \underline{v}_n \quad (6)$$

Hedder en lineær kombination

Lineær uafhængighed

Definition (7.1.1: Lineær uafhængighed)

Et sæt vektorer $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ kaldes lineær uafhængige hvis og kun hvis ligningen:

$$c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + c_n \cdot \underline{v}_n \quad (7)$$

kun har én løsning: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Mere generelt kan man også sige, at $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ skal have rang n (aka, antallet af pivot-elementer i matricen opbygget af v-vektorerne skal være lig med mængden af vektorer).

Finde ud af om et sæt vektorer er lineært uafhængige:

For at finde ud af, om et sæt er lineært uafhængigt, skal man lave en matrix opbygget af vektorerne. Hvis man kan finde den på reduceret trappetform, er sættet lineært uafhængigt.

Matrixalgebra

Regneregler for matricer

Betragt følgende matricer:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Addition:

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Skalarmultiplikation:

$$c \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & \dots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Transponerede matrix:

Bytter om på rækker og søjler

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Gange matrix med vektor:

Definition (7.2.1: Gange matricer og vektorer)

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\underline{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ Bemærk at $\underline{V}$ skal have lige så mange koordinater som der er søjler i $\underline{\underline{A}}$. Resultatet bliver en vektor.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{V} &= v_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \dots + v_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot v_1 + \dots + a_{n1} \cdot v_n \\ \vdots \\ a_{1n} \cdot v_1 + \dots + a_{mn} \cdot v_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Gange matricer sammen: Bygger videre på før.

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{F}^{m \times n}, \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{F}^{n \times L} \quad (13)$$

Antal søjler i $\underline{\underline{B}}$ skal være lig med antal rækker i $\underline{\underline{A}}$.

$$\underline{\underline{B}} = [b_1 \quad \dots \quad b_L]$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = [\underline{\underline{A}} \cdot b_1 \quad \underline{\underline{A}} \cdot b_2 \quad \dots \quad \underline{\underline{A}} \cdot b_L] \quad (14)$$

Bemærk $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in \mathbb{F}^{m \times L}$

Note

Bemærk: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

Lineære ligningssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad (15)$$

Er det samme som:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

Definition (Identitetsmatrix)

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n} \quad (17)$$

Kaldes den $n \times n$ identitetsmatrix

Definition (7.3.1: Invers matrix)

Givet $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ hvis der findes en matrix $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ således at $A \cdot B = \mathbf{I}_n$ og $B \cdot A = \mathbf{I}_n$, så siges at A er invers og B kaldes A 's inverse matrix:

$$B = A^{-1} \quad (18)$$

Man finder den ved:

$$[A | \mathbf{I}_n] \longrightarrow \dots \longrightarrow [\mathbf{I}_n | A^{-1}] \quad (19)$$