

Matrix algebra

En matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

Søjlevektor $\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times 1} = \mathbb{F}^m$ (tuple)

Rækkevektor $[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \in \mathbb{F}^{1 \times n}$

Addition af søjlevektor

$$\underline{a}, \underline{b} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{bmatrix}$$

Skalar multiplikation

$$c \in \mathbb{F} \quad c \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} c \cdot a_1 \\ \vdots \\ c \cdot a_m \end{bmatrix}$$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{F}^m, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$

$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n$
 Hedder en lineær kombination af vektorerne $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

Eksempel

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Lineært uafhængige

Definition 7.1.1

Et sæt vektorer $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ kaldes lineært uafhængige hvis og kun hvis ligningen $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n = 0$ kun har løsningen $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Ellers, hvis der er flere løsninger, kaldes det lineært afhængigt

Eksempel ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$)

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Vi ved: $\underline{v}_2 = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_3$
 dvs. $0 = 2 \cdot \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3$
 ligning $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = 0$
 har en løsning $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = -1$
 konklusion: sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ er lineært afhængigt

Alternativ løsning

beegnet ligningen: $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = 0 \xrightarrow{I} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 2c_1 - c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{I} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

dvs. $\begin{cases} 2c_1 - c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}$

dvs. $\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$

Uendelige mange løsninger
 konklusion: sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ er lineært afhængigt

Generelt

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{F}^m$ ergiver

Sættet $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ er lineært uafhængigt hvis og kun hvis

$(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ har rang n .

(altlevet af pivot-elementer skal være lig med n)

Eksempel ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, n=3$)

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

kan nu se at rangen vil være 2

$\text{rank}(A) = 2$

Sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ er lineært afhængigt

dvs. ligningen $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = 0$ har en løsning som er $(-1, 4, -1)$
 $\begin{cases} c_1 - 7c_3 = 0 \\ c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow -9 \cdot \underline{v}_1 + 4 \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = 0 \Leftrightarrow -7 \underline{v}_1 + 4 \underline{v}_2 = \underline{v}_3$

Matrix algebra

Regleregler for matrixer

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c \in \mathbb{F}$$

$$c \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & \dots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Den transponerede matrix
bytter om på rækker og søjler

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eksempel

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 56 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 78 \\ 910 \\ 1112 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

beregn $(3 \cdot \underline{A} + \underline{B})^T$

$$(3 \cdot \underline{A} + \underline{B})^T = \left(\begin{bmatrix} 36 \\ 102 \\ 168 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 78 \\ 910 \\ 1112 \end{bmatrix} \right)^T = \left(\begin{bmatrix} 114 \\ 1012 \\ 280 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1012 & 280 \\ 114 & 280 \end{bmatrix}$$

Gånge matrix sammen

Gange matrix og vektor

Definition 7.2.1

$\underline{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$

$\underline{A} \cdot \underline{v} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + v_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + v_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \dots + a_{1n} \cdot v_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot v_1 + a_{m2} \cdot v_2 + \dots + a_{mn} \cdot v_n \end{bmatrix}$$

Gånge matrixer

begge vider på for
 $\underline{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\underline{B} \in \mathbb{F}^{n \times l}$ enten søjler i $\underline{B}$ skal være
lige med antal rækker i $\underline{A}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

Bemerk $\underline{A} \cdot \underline{B} \in \mathbb{F}^{m \times l}$

Eksempel

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 56 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -12 \\ 3-2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & 12+2(-2) \\ 7 & 32+4(-2) \\ 13 & 52+6(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-2 \\ 9-2 \\ 13-2 \end{bmatrix}$$

Sætning 7.2.1 (derivis)

$\underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$

Her ser eksempel hvor det ikke gælder

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \end{bmatrix}$$

gælder $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$?

Her ser eksempel hvor det ikke gælder

seru hvis begge er defineret
er de ikke nødvendigvis ens

Lineære ligningssystemer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Definition

$\underline{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$

kaldes den $n \times n$ identitetsmatrix

Invers matrix Definition 7.3.1

Givet $\underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ hvis der findes en
matrix $\underline{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ således at $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{I}_n$ og
 $\underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I}_n$ så siges at $\underline{A}$ er invers og
 $\underline{B}$ kaldes $\underline{A}$'s inverse matrix ($\underline{B} = \underline{A}^{-1}$)

Hvordan finder man $\underline{A}^{-1}$ (hvis den findes)

Hvis $\underline{A}^{-1}$ findes, kan den
beregnes som følger:

Vi vil: $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{I}_n$ $\underline{C} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}$

$\underline{A} \cdot \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$, $\underline{A} \cdot \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$, ..., $\underline{A} \cdot \underline{b}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ..., $\underline{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{I}_n \end{bmatrix}$

($\underline{A}^{-1}$ findes) $\Leftrightarrow$ den reducerede echelonform
af $\underline{A}$ er $\underline{I}_n$
 $\Leftrightarrow \text{rank}(\underline{A}) = n$

Eksempel

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \end{bmatrix}$

afgør om $\underline{A}^{-1}$ findes og
hvis ja, beregn den

Svar

$$\begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 34 & 01 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 0 & -231 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{231}R_2} \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{A}^{-1}$ findes og er lig med $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

Løse lineære ligningssystem Eksempel

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \end{bmatrix}$ $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opgever

$$y_v = \begin{bmatrix} 28 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$2\underline{U} - 3\underline{W} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & -21 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -25 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$3\underline{u} - 2\underline{v} + 2\underline{w} = \begin{bmatrix} 12 - 14 + 2 \\ -6 - 8 + 11 \\ 0 - 6 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

16) nej

$$\begin{cases} 4c_1 + 7c_2 = 0 \\ -2c_1 + 4c_2 = 0 \\ 3c_2 = 0 \end{cases}$$

$$I = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_2 \leftarrow 4I_1 \\ R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow \frac{1}{4}R_1 \\ R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_4 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_3 \\ R_1 \leftarrow R_1 - R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 12 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 10 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1 + R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{4}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{P(4)} = 3$$

Akar rang 3
Saj-

ne, ford:
red. trappform
mon oxid have
nukke

$$\begin{array}{l} A \cdot B \\ B \cdot A \\ C \cdot B \\ A \cdot C \\ - C \end{array}$$

$$\underline{\underline{A \cdot B}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B \cdot A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right]$$

7

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{b} \\
 & \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{b} \cdot \underline{A}^{-1} \\
 & \updownarrow \\
 & \underline{I}_n \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} \\
 & \downarrow \\
 & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}
 \end{aligned}$$

7

$$\text{a) } \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + R_1}}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ingen Lösung da } 0 \neq 3$$

7c

Determinanter

$\underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ givet, $\underline{A} = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ hvor $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{F}^n$.

so er følgende udsagn ækvivalente.

1) $\underline{A}$ er invertibel

2) $\underline{A}$'s reducerede trappform er $\underline{I}_n$

3) $\text{rang}(\underline{A}) = n$ ($\rho(\underline{A}) = n$)

5) sættet $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ bestående af $\underline{A}$'s søjler er lineært uafhængigt

4) Ligningssystemet

$$\left(\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

har kun løsningen $\underline{x} = \underline{0}$

6) $\det(\underline{A}) \neq 0$
(determinanten af matrixen $\underline{A}$ er ikke nul)

Definition 8.1.1

$A(i,j)$ er matrixen man får fra $\underline{A}$ ved at slette den i 'te og j 'te søjle

(dvs. $\underline{A}(i,j) \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)}$)

indgange: $\underline{A}$'s første søjle

hvis $n=1$

hvis $n \geq 1$

Definition 8.1.2. (determinant)

Givet $\underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, så defineres $\det(\underline{A}) =$

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a_{i,1} \cdot \det(\underline{A}(i,1))$$

Eksempel ($n=2$)

$$\underline{A}(1,1) = [a_{22}]$$

$$\underline{A}(2,1) = [a_{12}]$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(\underline{A}(1,1)) + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \det(\underline{A}(2,1))$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Eksempel ($n=3$)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$\begin{aligned} \det(\underline{A}) &= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot 4 - 0 + (-1) \cdot 16 = -8 \end{aligned}$$

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}$$
$$n=1$$

afstand fra
 a_{11} til 0

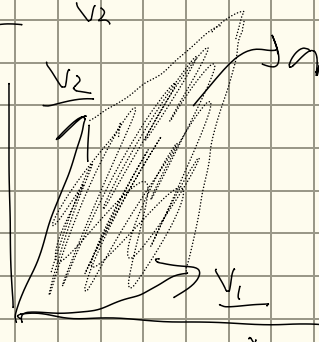


$$\det([a_{11}]) = a_{11}$$

$$|a_{11}| = |\det([a_{11}])|$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \underline{A} \quad \det(\underline{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{matrix}$$



To tilfælde hvor $\det(\underline{A})$ er nem at beregne

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

store trekantsmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal matrix

i disse tilfælde gælder

$$\det(\underline{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Definition 8.1.2: man sig ert man udvikler
determinanten efter den første søjle af A

Man kan også udvikle efter en af de andre søjler eller en række.

$$\det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\underline{A}(i,j)) \text{ udviklet efter den } j^{\text{te}} \text{ søjle}$$

$$\det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\underline{A}(i,j)) \text{ udviklet efter den } j^{\text{te}} \text{ række}$$

Eksempel

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}\right) = -1 \cdot 0 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right) + 0 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right) - 4 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ = -4 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = -4 \cdot (-2 - (-4)) = -8$$

Seening

$\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$

$$\det(\underline{A}^T) = \det(\underline{A})$$

$$\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det(\underline{A}) \cdot \det(\underline{B})$$

Hvis A er invertibel, så er $\det(\underline{A}) \neq 0$

Hvorfør? $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{I}_n$

derfor: $\det(\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1}) = \det(\underline{I}_n) = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$

$\underline{I}_n$ er diagonalmatrix

$$\det(\underline{A}) \cdot \det(\underline{A}^{-1}) = 1 \quad \text{faktisk}$$

konklusion: $\det(\underline{A}) \neq 0 \iff \underline{A}$ er invertibel $\iff \det(\underline{A}) \neq 0$

Opgaver

1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2)

a)

$$\underline{A(1,1)} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = 0$$

$$\underline{A(2,1)} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = 0$$

$$\underline{A(3,1)} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det = 18 - 20 = -2$$

b)

$$\det(A) = -6$$

c)

pga de
mange
nuller

d)

$$2 \cdot 0 - 4 \cdot (-3 \cdot 5) + 6 \cdot 9 =$$

$$6 \cdot 9 - 4 \cdot 15 = 54 - 60 = -6$$

3)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 8 + 4 \cdot (-1 - 1) = 0$$

4)

$$0 = a \cdot (a+6) + 2 \cdot (a+6) = a^2 + 8a + 12$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{-4}{2} = -2 \\ \frac{-8-4}{2} = -6 \end{cases}$$

5) a)

Om man ganger dem
sammen for en
effekt, man tager
den transponerede
tilgenmægt fordi
man vil gange de
samme værdier
sammen

b)

$$\text{fordi: } (\underline{\underline{A}}^T)^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^T = (\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}})^T = \underline{\underline{I}}^T = \underline{\underline{I}}$$

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6c_2 \quad c_3 &= 0 \\ 6c_1 + 5c_2 + 2c_3 &= 0 \\ -4c_2 - 5c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & x & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 0 & -1c_3 \\ 6 & -12 & & 1 \\ 0 & 0 & x & 4c_2 \end{array}$$

$$-c_3 = 6c_2 = 1,5 \cdot 4c_2 = 1,5 \times c_2$$