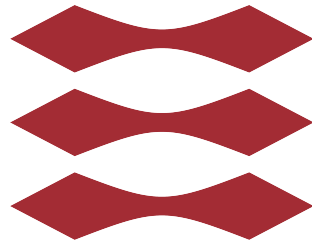


DTU



Andenordens lineære differential- ligninger - OPGAVER

Date: 02 December 2025

Semester: Spring 2025

Rasmus Rosendahl-kaa

Opgave 1

Er følgende differentialligninger og systemer af differentialligninger homogene eller inhomogene?

1. $f''(t) = f'(t) - 2f(t)$.
2. $f'(t) - t \cdot f(t) - e^{-3t} = 0$.
3. $\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
4. $\begin{cases} f_1'(t) = f_2(t) \\ f_2'(t) = f_1(t) - f_2(t) \end{cases}$

Solution:

- 1) Homogent da: $f''(t) - f'(t) + 2f(t) = 0$
- 2) Inhomogent. $q(t) = e^{-3t}$
- 3) Inhomogent da $q(t) = 1$ (se Definition 13.2.1 i bogen)
- 4) Homogent da:

$$f_2'(t) = f_1(t) - f_1'(t) \Leftrightarrow f_1''(t) + f_1'(t) - f_1(t) = 0$$

Opgave 2

Givet den homogene reelle differentialligning

$$f''(t) + 3f'(t) - 4f(t) = 0 \quad (1)$$

Find dens fuldstændige løsning.

Note

Find først rødderne i ligningens karakteristiske polynomium. Se Afsnit 13.3 fra lærebogen for flere oplysninger og eksempler.

Solution:

$$\begin{aligned} P_A(z) &= z^2 + 3z - 4 \\ D &= 3^2 - 4 \cdot (-4) = 25 \\ \lambda_1 &= \frac{-3 + 5}{2} = 1, \lambda_2 = \frac{-3 - 5}{2} = -4 \end{aligned} \quad (2)$$

Finder egenrummene:

$$E_1 = \ker \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_{-4} = \ker \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \quad (3)$$

Fuldstændige løsning:

$$f(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t}, (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

Opgave 3

Givet følgende homogene reelle differentialligninger. Find deres fuldstændige løsning.

1. $f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 0.$ (5)

2. $f''(t) + 2f'(t) + 5f(t) = 0.$ (6)

Note

Alt afhængig af om det karakteristiske polynomium har to reelle rødder, to ikke-reelle rødder eller en dobbeltrod, skal man bruge Scenarie 1, Scenarie 2, Scenarie 3 på sider 262 og 263 i Afsnit 13.3 fra lærebogen.

Solution:

Opstiller karakteristiske polynomium for dem begge

$$P_A^1(z) = z^2 - 6z + 9$$

$$P_A^2(z) = z^2 + 2z + 5 \quad (7)$$

Finder D :

$$D_1 = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$$

$$D_2 = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16 \quad (8)$$

Finder rødder:

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = -\frac{-6}{2} = 3 \quad (9)$$

For den første ligning er løsningen:

$$f_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \quad (10)$$

For den anden:

$$\lambda_1^2 = \frac{-2 + i\sqrt{|-16|}}{2} = -1 + 2i$$

$$\lambda_2^2 = \overline{\lambda_1^2} = -1 - 2i$$
(11)

Løsning for den anden:

$$f_2(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$$
(12)

Opgave 4

Givet den inhomogene differentialligning

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = e^{2t}.$$
(13)

Opgave 4a

Bestem et reelt tal a således at funktionen $f(t) = a \cdot e^{2t}$ er en partikulær løsning til den givne differentialligning.

Note

Indsæt funktionen $f(t) = a \cdot e^{2t}$ i differentialligningen. Hvilken ligning skal a opfylde for at funktionen er en løsning til differentialligningen?

Solution:

Hvis $f(t) = a \cdot e^{2t}$ så:

$$f'(t) = 2ae^{2t}$$

$$f''(t) = 4ae^{2t}$$
(14)

Indsætter dem:

$$4ae^{2t} - 6 \cdot (2ae^{2t}) + 9ae^{2t} = e^{2t}$$

$$4ae^{2t} - 12ae^{2t} + 9ae^{2t} = e^{2t}$$

$$1ae^{2t} = e^{2t}$$

$$a = 1$$
(15)

Opgave 4b

Beskriv nu den fuldstændige løsning til den givne inhomogene differentialligning. Bemærk at den tilhørende homogene differentialligning allerede blev undersøgt i Opgave 3.

Note

Den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene differentialligning $f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 0$ blev fundet i Opgave 3 til at være

Solution:

Homogene løsning fra før:

$$f_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \quad (16)$$

$$f(t) = f_{\text{par}}(t) + f_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + e^{2t} \quad (17)$$

Opgave 5

En lineær andenordens differentialligning med konstante koefficienter kan omskrives til et system af førsteordens differentialligninger (se Afsnit 13.3 fra lærebogen). I denne opgave betragtes et eksempel.

Opgave 5a

Givet differentialligningen $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = \cos(t)$. Omskriv denne differentialligning til et system af to førsteordensdifferentialligninger i funktionerne $f_1(t)$ og $f_2(t)$, hvor $f_1(t) = f(t)$ og $f_2(t) = f'(t)$.

Solution:

Vi ved: $f_1(t) = f(t)$, $f_2(t) = f'(t)$ og $f_2'(t) = f''(t)$, så:

$$f_2'(t) + 2f_2(t) + f_1(t) = \cos(t) \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Opgave 5b

Tjek at Ligning (13.13) i Sætning 13.3.1 fra lærebogen ville have givet det samme system.

Solution:

Hvis man kigger på Ligning (13.13) ser man, at $a_0 = 1$ og $a_1 = 2$, som kan indsættes for at få samme system.

Opgave 6

Givet den inhomogene differentialligning

$$f''(t) + 3f'(t) - 4f(t) = e^t. \quad (20)$$

Opgave 6a

Inspireret af Opgave 4, kunne man håbe at der findes et reelt tal a således at $f(t) = a \cdot e^t$ er en partikulær løsning til den givne differentialligning. Vis at der faktisk ikke findes nogen funktion på formen $f(t) = a \cdot e^t$, som er en løsning. Hvad er problemet?

Solution:

Når $f(t) = ae^t$ fås: $f'(t) = ae^t$ og $f''(t) = ae^t$. Indsættes de fås:

$$\begin{aligned} ae^t + 3ae^t - 4ae^t &= e^t \\ 0ae^t &= e^t \end{aligned} \quad (21)$$

Opgave 6b

Prøv nu at finde en partikulær løsning på formen $f(t) = a \cdot t \cdot e^t$. Tjek eventuelt først at $(t \cdot e^t)' = e^t + t \cdot e^t$ og $(t \cdot e^t)'' = 2e^t + t \cdot e^t$.

Solution:

Når $f(t) = ate^t$ fås:

$$\begin{aligned} f'(t) &= ae^t + ate^t \\ f''(t) &= 2ae^t + ate^t \end{aligned} \quad (22)$$

Indsættes de fås:

$$\begin{aligned} 2ae^t + ate^t + 3 \cdot (ae^t + ate^t) - 4 \cdot (ate^t) &= \\ 2ae^t + ate^t + 3ae^t + 3ate^t - 4ate^t &= \\ 5ae^t &= e^t \\ 5a &= 1 \\ a &= \frac{1}{5} \end{aligned} \quad (23)$$

En partikulær løsning kunne være:

$$f(t) = \frac{1}{5} \cdot t \cdot e^t \quad (24)$$

Opgave 6c

Beskriv nu den fuldstændige løsning til den givne inhomogene differentialligning. Bemærk at den tilhørende homogene differentialligning allerede blev undersøgt i Opgave 2.

Note

Den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene differentialligning $f''(t) + 3f'(t) - 4f(t) = 0$ blev fundet i Opgave 2 til at være $f(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Solution:

Homogene løsning fra før:

$$f_{\text{hom}}(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t} \quad (25)$$

$$f(t) = f_{\text{par}}(t) + f_{\text{hom}}(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t} + \frac{1}{5}te^t \quad (26)$$

Opgave 7

Det oplyses at den fuldstændige reelle løsning til en homogen lineær andenordens differentialligning med konstante reelle koefficienter er

$$f(t) = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (27)$$

Opskriv differentialligningen.

Note

Fordi 0 er en løsning (sæt $c_1 = 0$ og $c_2 = 0$ i den fuldstændige løsning), er differentialligningen man leder efter en homogen differentialligning. Differentialligningen kan derfor skrives på formen $f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0$ for visse reelle tal a_0, a_1 .

Note

Hvilke rødder skal det karakteristiske polynomium $Z^2 + a_1 Z + a_0$ have?

Solution:

Vi ved:

$$f(t) = c_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t)$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{|a_1^2 - 4a_0|}}{2} \quad (28)$$

Her har vi:

$$\alpha = -1$$

$$\beta = 2 \quad (29)$$

Dvs:

$$\alpha = -\frac{a_1}{2} = -1$$

$$a_1 = 2 \quad (30)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{|a_1^2 - 4a_0|}}{2} = \frac{\sqrt{|4 - 4a_0|}}{2} = 2$$

$$\sqrt{|4 - 4a_0|} = 4$$

$$|4 - 4a_0| = 16 \quad (31)$$

da vi ved D er negativ (pga cos og sin):

$$4 - 4a_0 = -16$$

$$4a_0 = 20$$

$$a_0 = 5$$

Så differentialligningen er:

$$f''(t) + 2f'(t) + 5f(t) = 0 \quad (32)$$

Opgave 8

Det oplyses at den fuldstændige reelle løsning til en inhomogen lineær andenordens differentialligning er

$$f(t) = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t) + 7 + 3t + 5e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Opskriv differentialligningen.

Note

Hvad er den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene differentialligning? Kan den tilhørende homogene differentialligning bestemmes ved hjælp af svaret til Opgave 7?

Note

Den tilhørende homogene differentialligning er ifølge Opgave 7 givet som $f''(t) + 2f'(t) + 5f(t) = 0$. Den inhomogene differentialligning der er efterspurgt i denne opgave kan derfor skrives på formen $f''(t) + 2f'(t) + 5f(t) = q(t)$.

Note

$f(t) = 7 + 3t + 5e^t$ er en partikulær løsning til den ønskede differentialligning. Hvad får man hvis man indsætter denne funktion i sidstnævnte differentialligningen fra forrige hint?

Solution:

Vi har lige fundet differentialligningen for dens tilhørende homogene ligning:

$$f''(t) + 2f'(t) + 5f(t) = 0 \quad (34)$$

Så mangler vi at finde hvad $q(t)$ skal være. For at finde $q(t)$ kan vi indsætte $f(t) = 7 + 3t + 5e^t$ og se hvad resultatet bliver: Først:

$$\begin{aligned} f(t) &= 7 + 3t + 5e^t \\ f'(t) &= 3 + 5e^t \\ f''(t) &= 5e^t \end{aligned} \quad (35)$$

De indsættes:

$$\begin{aligned} 5e^t + 2 \cdot (3 + 5e^t) + 5 \cdot (7 + 3t + 5e^t) &= \\ 5e^t + 6 + 10e^t + 35 + 15t + 25e^t &= \\ 40e^t + 15t + 41 \end{aligned} \quad (36)$$

Derfor må differentialligningen være:

$$f''(t) + 2f'(t) + 5f(t) = 40e^t + 15t + 41 \quad (37)$$

Opgave 9

Givet den homogene reelle differentialligning

$$f''(t) + 3f'(t) - 4f(t) = 0. \quad (38)$$

Bemærk at differentialligningen er den samme som i Opgave 2. Målet med opgaven er at finde løsningen til differentialligningen som opfylder begyndelsesbetingelserne $f(0) = 1$ og $f'(0) = 2$.

Opgave 9a

I Opgave 2 var resultatet at den givne differentialligning har den fuldstændige løsning

$$f(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Hvilken ligning skal c_1 og c_2 opfylde for at det gælder at $f(0) = 1$?

Solution:

Den skal opfylde:

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 = 1 \\ &= c_1 + c_2 = 1 \end{aligned} \quad (40)$$

Opgave 9b

Hvilken ligning skal c_1 og c_2 opfylde for at det gælder at $f'(0) = 2$?

Note

Ligesom i spørgsmål a, vides fra Opgave 2 at

$$f(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

Tag nu den afledte på begge sider af lighedstegnet og indsæt bagefter $t = 0$.

Note

Ud fra den fuldstændige løsning

$$f(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (42)$$

fås ved differentiation på begge sider af lighedstegnet at:

$$f'(t) = c_1 \cdot e^t - 4c_2 \cdot e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (43)$$

Brug nu sidste del af forrige hint.

Solution:

Kan finde $f'(t)$ for den fuldstændige løsning:

$$f'(t) = c_1 \cdot e^t - 4c_2 \cdot e^{-4t} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= c_1 \cdot e^0 - 4c_2 \cdot e^0 = 2 \\ &= c_1 - 4c_2 = 2 \end{aligned} \quad (45)$$

Opgave 9c

Find nu den løsning $f(t)$ til differentialligningen som opfylder $f(0) = 1$ og $f'(0) = 2$.

Note

Bestem c_1 og c_2 ved at løse de to ligninger man fandt i spørgsmål a og b.

Solution:

To ligninger med to ubekendte. Isolerer c_1 i $c_1 - 4c_2 = 2$:

$$c_1 = 2 + 4c_2 \quad (46)$$

Sætter ind i $c_1 + c_2 = 1$:

$$\begin{aligned} 2 + 4c_2 + c_2 &= 1 \\ 5c_2 &= -1 \\ c_2 &= -\frac{1}{5} \end{aligned} \quad (47)$$

Indsætter c_2 i $c_1 + c_2 = 1$:

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{1}{5} &= 1 \\ c_1 &= \frac{6}{5} \end{aligned} \quad (48)$$

Indsætter c_1 og c_2 :

$$f(t) = \frac{6}{5} \cdot e^t - \frac{1}{5} \cdot e^{-4t} \quad (49)$$