

Hjemmeopgave 3

01001

Mathematics 1a (Polytechnical Foundation)

Student: Rasmus Rosendahl-Kaa (S255955)

Due: 23 Nov 2025

Problem A

Lad W være udspændt af følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Angiv en ordnet basis for W

Solution:

For at finde den ordnede basis W , opstiller vi en totalmatrix, T bestående af v_1, v_2 og v_3 :

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Herefter finder vi den reducerede trappeform for matricen, hvor de søjler med pivotelementer, må være de vektorer i den ordnede basis.

$$\begin{aligned} T &\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_2 - \frac{1}{3} \cdot R_2} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{9} \cdot R_2} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 5 \cdot R_2} \\ &\begin{bmatrix} -1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow (-1) \cdot R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Her kan det ses, at der er to pivotelementer i søjlerne 1 og 2, så W må bestå af v_1 og v_2 :

$$W = (v_1, v_2) \quad (4)$$

Problem B

Lad $C_\infty(\mathbb{R})$ være det reelle vektorrum fra Eksempel 10.4.5 i lærebogen. Der defineres en funktion $L : C_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R})$ ved $L(f) = f' + f - 1$ hvor udtrykket f' betegner den afledte funktion af f . Er L en lineær afbildning?

Solution:

For at L skal være en lineær afbildning, skal den opfylde følgende (Definition 11.0.1):

- 1) $L(f + g) = L(f) + L(g)$ for alle $f, g \in C_\infty(\mathbb{R})$
- 2) $L(c \cdot f) = c \cdot L(f)$ for alle $c \in \mathbb{R}$ og $f \in C_\infty(\mathbb{R})$

For at teste det første krav, kan vi betragte funktionerne $f, g \in C_\infty(\mathbb{R})$:

$$L(f + g) = (f + g)' + (f + g) - 1 \quad (5)$$

Man ved at $(f + g)' = f' + g'$ så:

$$L(f + g) = f' + g' + f + g - 1 \quad (6)$$

Det skal være lig med $L(f) + L(g)$, som regnes:

$$L(f) + L(g) = (f' + f - 1) + (g' + g - 1) = f' + g' + f + g - 2 \quad (7)$$

Da $-1 \neq -2$, er L **ikke** en lineær afbildning, da den ikke opfylder første krav.

Andet krav behøves ikke at regnes, da vi nu allerede ved, at det ikke kan være en lineær afbildning

Problem C

Lad $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ være defineret som følger:

$$F\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{C} \quad (8)$$

Der gives ordnede baser

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ og } \gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ for } \mathbb{C}^2 \quad (9)$$

Beregn afbildningsmatricen ${}_\beta[F]_\gamma$.

Solution:

Per Lemma 11.3.3, kan vi definere afbildningsmatricen som følgende:

$${}_\beta[F]_\gamma = \begin{bmatrix} [F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})]_\beta & [F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})]_\beta \end{bmatrix} \quad (10)$$

$F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$ og $F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ beregnes:

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ -4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (12)$$

De kan sættes ind i afbildningsmatricen:

$${}_{\beta}[F]_{\gamma} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\beta} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Beta-koordinaterne, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\beta}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta}$, udregnes:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{5} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{11}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{5} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Derfor må afbildningsmatricen ${}_{\beta}[F]_{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{11}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

Problem D

Der vælges følgende ordnede basis for det reelle vektorrum $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (16)$$

Givet den lineære afbildning $M : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ defineret ved

$$M(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (17)$$

Beregn afbildningsmatricen ${}_{\beta}[M]_{\beta}$.

Solution:

Afbildningsmatricen defineres:

$${}_{\beta}[M]_{\beta} = \begin{bmatrix} \left[M\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \right]_{\beta} & \left[M\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \right]_{\beta} & \left[M\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \right]_{\beta} & \left[M\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \right]_{\beta} \end{bmatrix} \quad (18)$$

De fire funktioner kan udregnes:

$$\begin{aligned}
 M\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 M\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 & -1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 M\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 & -1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 M\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Så kan Beta-koordinaterne

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_\beta$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_\beta$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_\beta$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_\beta$ udregnes

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_\beta &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right]_{\beta} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\beta} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right]_{\beta} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Derfor må afbildningsmatricen være:

$${}_{\beta}[M]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Problem E

Givet følgende matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (28)$$

Bestem matricens egenverdier samt ordnede baser for de tilhørende egenrum.

Solution:

For at finde egenverdierne findes først det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned}
P_A(Z) &= \det(\mathbf{A} - Z \cdot I_3) \\
&= \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} - Z \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \left(\begin{bmatrix} 2-Z & 0 & 0 \\ 2 & 1-Z & -1 \\ 2 & -1 & 1-Z \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{29}$$

Første række vælges til at udregne determinanten, da der er to nuller:

$$\begin{aligned}
P_A(Z) &= (2-Z) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1-Z & -1 \\ -1 & 1-Z \end{bmatrix} \right) \\
&= (2-Z) \cdot ((1-Z) \cdot (1-Z) - 1) \\
&= (2-Z) \cdot ((1-Z)^2 - 1) \\
&= (2-Z) \cdot (Z^2 - 2Z + 1 - 1) \\
&= (2-Z) \cdot Z \cdot (Z-2)
\end{aligned} \tag{30}$$

$(2-Z)$ kan omskrives som $-(Z-2)$ for at få det på formen, så vi kan aflæse rødderne:

$$P_{A(Z)} = -(Z-2)(Z-0)(Z-2) = -1 \cdot (Z-0)(Z-2)^2$$

Egenverdierne kan aflæses som rødderne i det karakteristiske polynomium, som må være:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = 2$

Egenrummet er defineret som $E_\lambda = \ker(\mathbf{A} - \lambda \cdot I_n)$ (Lemma 12.2.3).

For λ_1 :

$$E_0 = \ker(\mathbf{A} - 0 \cdot I_3) = \ker \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \tag{31}$$

Den reducerede trappeform findes:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\end{aligned} \tag{32}$$

Der er én variabel da $v_1 = 0$. v_3 sættes lig med t : $v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = t$ Så fås:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad (33)$$

Derfor er:

$$E_0 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (34)$$

For λ_2 :

$$\begin{aligned} E_2 &= \ker(A - 2 \cdot I_3) = \ker \left(\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 2 & 1-2 & -1 \\ 2 & -1 & 1-2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \ker \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

Den reducerede trappeform findes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

Der er to variabler. v_2 sættes lig med u og v_3 sættes lig med t : $v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}t$ Så fås:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u, t \in \mathbb{R} \quad (37)$$

Derfor er:

$$E_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (38)$$

Samlet fås at der er to egenverdier, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ med de ordnede baser for deres tilhørende egenrum:

$$\begin{aligned} E_0 &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ E_2 &= \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Problem F

Om et inhomogent lineært ligningssystem over $\mathbb{R}$ med fire ligninger og to ubekendte oplyses at

$$v_p = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (39)$$

er en partikulær løsning. Er vektoren $3 \cdot v_p$ en løsning til systemet?

Solution:

Man kan skrive det lineære ligningssystem (jeg vil kalde det A) løsning (jeg vil kalde den b) som en lineærkombination af systemet:

$$A \cdot v_p = b \quad (40)$$

Hvis $3 \cdot v_p$ også er en løsning, får vi at:

$$A \cdot (3 \cdot v_p) = b \quad (41)$$

Da $A \cdot v_p = b$, kan vi sætte det ind for b :

$$A \cdot (3 \cdot v_p) = A \cdot (v_p) \quad (42)$$

For at dette skulle være sandt, skulle $3 \cdot v_p = v_p$, hvilket ikke er sandt.

Derfor kan det konkluderes at vektoren $3 \cdot v_p$ **ikke** er en løsning.

Problem G

lad V være det reelle vektorrum $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. Angiv et underum af V af dimension 5 og gør rede for dit svar.

Solution:

For at et vektorrum, W kan være et underrum af V , skal følgende være sandt (Lemma 10.4.2): $u + c \cdot v \in W$ for alle $u, v \in W$ og alle $c \in \mathbb{R}$

Da vektorrummet V er det reelle vektorrum $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, vil ethvert vektorrum også i $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ altid være et vektorrum for W . Det er på grund af, at enhver skalarmultiplikation eller vektoraddition, man vil lave, altid vil give et vektorrum, der også er i $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ da du ikke kan gange/lægge to reelle tal sammen og få et ikke-reelt tal.

Det vil sige, at ethvert vektorrum $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ med dimension 5 vil være et underrum af V .

Da dimensionen af et vektorrum er antallet af lineært uafhængige elementer i dens base, kan man vælge en base med 5 lineært uafhængige elementer. Jeg vælger:

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (43)$$

Vektorrummet kan dermed defineres som:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Så det vil sige, at vektorrummet:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \quad (45)$$

Må være et underrum i V og have dimensionen $\dim(W) = 5$.