

Induktion

Egenskab af de naturlige tal

Sætning 3.4.1

Lad S være en delmængde $\mathbb{N}$

Antag at vi ved at:

- 1) $1 \in S$
- 2) Hvis $n-1 \in S$, så gælder at $n \in S$ for alle $n \geq 2$

Hvis opfyldt, så $S = \mathbb{N}$

Korollar 3.4.2

Lad $P(n)$ være et logisk udsagn for alle $n \in \mathbb{N}$.

Antag at:

- 1) $P(1)$ er sandt
- 2) Hvis $P(n-1)$ er sandt, så er $P(n)$ sandt for alle $n \geq 2$

Så er $P(n)$ sandt for alle $n \in \mathbb{N}$

Bevis

Lad $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ er sandt}\}$

(At vise at $S = \mathbb{N}$)

Vi ved 1 er et element i S , fordi det var givet $P(1)$ er sandt

Vi ved også at hvis $n-1 \in S$, så er $n \in S$

På sætning 3.4.1, kan vi konkludere at $S = \mathbb{N}$

Dvs: $P(n)$ er sandt for alle $n \in \mathbb{N}$

Eksempel

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(kan også skrives som $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$)

$P(n)$ er udsagnet at $\frac{n(n+1)}{2}$ holder for givet $n \in \mathbb{N}$

Vis at det holder for alle $n \in \mathbb{N}$

Induktionsbevis:

Induktionsbasis: tjek at $P(1)$ er sandt
 $P(1)$ er udsagnet at $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ er sandt
 korrekt 1+1=2

Induktionstrin: $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Antag at $P(n-1)$ er sandt

Under antagelsen ønsket vi vise (induktionshypotesen)
 at $P(n)$ også er sandt

$$P(n-1): 1+\dots+(n-1) = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \text{ er sandt}$$

$$P(n): 1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} 1+\dots+n &= 1+\dots+(n-1)+n \\ &= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n \\ &= \frac{(n-1) \cdot n + 2n}{2} = \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Dvs $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ for alle $n \geq 2$

Konklusion

$P(n)$ er sandt for alle naturlige tal

dvs: $1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Eksempel (Fibonacci tal)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n=1 \text{ eller } n=2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{hvis } n \geq 3 \end{cases}$$

Hvad sker hvis man lægger n Fibonacci tal sammen

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1 \leftarrow \text{hypotese } P(n)$$

$$n=1: F_1 = 1$$

$$n=2: F_1 + F_2 = 2$$

$$n=3: F_1 + F_2 + F_3 = 1+1+2=4$$

$$n=4: F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 7$$

$$n=5: F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 12$$

Vis at $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ via induktion over n

Induktionsbasis: $F_1 = F_2 - 1 = 1 = 2 - 1$. OK

Induktionstrin:

Antag at $F_1 + \dots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$ for et $n \geq 2$

Så gælder: $F_1 + \dots + F_n = F_1 + \dots + F_{n-1} + F_n$

$$= (F_{n+1} - 1) + F_n = F_n + F_{n+1} - 1$$

$$= F_{n+2} - 1$$

Konklusion

$F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ er sandt for alle $n \in \mathbb{N}$

Variant af induktion

Lad $b \in \mathbb{Z}$ og (and $P(n)$) være et logisk udsagn for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq b}$

hvor det gælder at:

1) $P(b)$ er sand

2) $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ for alle $n \geq b+1$

Så er $P(n)$ sand for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq b}$

Eksempel

$P(n): 2^n \geq n^2$

$P(1) = 2 \geq 1^2$ ($2 \geq 1$) er sand

$P(2) = 2^2 \geq 2^2$ ($4 \geq 4$) er sand

$P(3) = 2^3 \geq 3^2$ ($8 \geq 9$) er falsk

$P(4) = 2^4 \geq 4^2$ ($16 \geq 16$) er sand

at vise: $2^n \geq n^2$ er sand for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$

Induktionsbasis: ($n=4$) $2^4 \geq 4^2$ er sand

Induktionssteg: antag $2^{n-1} \geq (n-1)^2$ for $n \geq 5$

Så gælder

$$\begin{aligned} 2^n &= 2 \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot (n-1)^2 = 2 \cdot (n^2 - 2n + 1) = 2n^2 - 4n + 2 \\ &= n^2 + n^2 - 4n + 2 \\ &= n^2 + n(n-4) + 2 \end{aligned}$$

ved $n \geq 5$ så er $n(n-4)$ positiv
og er i hvert fald større end n^2
så $n^2 + n(n-4) + 2 \geq n^2 + 0 = n^2$

Derfor er $P(n)$ vist til at være sand

Opgaver

1a / 1b

$$c_3 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$c_4 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$c_5 = 5 \cdot 2 + 2 = 12$$

$$0 + 1 + 2 + 2 + 5 + 12 = 22$$

2a

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

n^2

2b + c

basis $p(0) = 1$ sandt

$$1 + \dots + (2 \cdot (n-1) - 1) = (n-1)^2$$

$$1 + \dots + (2 \cdot (n-1) - 1) + (2 \cdot n - 1) = (n-1)^2 + (2n-1)$$

$$= (n^2 - 2n + 1) + (2n - 1)$$

$$= n^2 - 2n + 2n - 1 + 1$$

$$= n^2$$

3a

Fordi s2 ville man dividere med 0

3b

$$1+r = \frac{r^2-1}{r-1} = \frac{(r-1) \cdot (r+1)}{r-1} = r+1$$

3c

$$1+r+\dots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$$

$$1+r+\dots+r^{n-1}+r^n = \frac{r^n-1}{r-1} + r^n$$

$$= \frac{r^n-1}{r-1} + \frac{(r-1) \cdot r^n}{r-1} = \frac{r^n-1}{r-1} + \frac{r \cdot r^n - r^n}{r-1}$$

$$= \frac{r^n - r^n - 1 + r \cdot r^n}{r-1} = \frac{r \cdot r^n - 1}{r-1} = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

4a

$$2 + 2 \cdot \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{2} \quad \text{hvis } n \geq 2$$

$$1 \quad \text{hvis } n = 1$$

4b

$$2 + 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 + 2 \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$= 1 + \frac{2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)}{-0.5} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2}{-0.5} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-0.5} - \frac{2}{-0.5}$$

$$= -\left(4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 4 + 2 = -\left(\frac{4 \cdot (1^{n+1})}{2^{n+1}}\right) + 6 = \frac{4}{2^{n+1}} + 6$$

$\uparrow$

$\frac{4}{2^{n+1}}$ vil blive mindre
når n bliver større
altså tæller og
tæller på 0
så holder vil
have tilbageløb
også når den
større

5a

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2}$$

$$a_3 = \sqrt{2+a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$a_4 = \sqrt{2+a_3} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

5b

Vihar at $\sqrt{2+a_{n-1}} < 2$ $n \geq 2$

da $a_{n-1} < 2$ aka $\sqrt{2+a_{n-1}} < 2$

Det kan anskues som at hvis $a_{n-1} < 2 \Rightarrow a_n < 2$
Det vil sige at $\sqrt{x}$ er strengt
voksende
Men da vi ved at $a_1 < 2$ så $a_2 < 2$, $a_3 < 2$, osv. så derfor $a_n < 2$

6a

Fordi den regner med arealet af rektangler
så den vil altid enten være lig med eller mindre
den aktuelle værdi

6b

du gange $d^3 \cdot (k_1^3 + k_2^3 + \dots + k_n^3)$

Bræksomme som $d^3 k_1^3 + d^3 k_2^3 + \dots + d^3 k_n^3$

Sådan også $d \cdot (k_1^3 + \dots + k_n^3)$

6c

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{1}{3} (n-1) \cdot (n-1+1) \cdot (n-1+2)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{3} (n-1) \cdot (n-1+1) \cdot n + n^2 = \frac{1}{3} (n^3 - n^2 - n^2 + n) + n^2 = \frac{1}{3} (n^3 - 2n^2 + n) + n^2 = \frac{1}{3} n^3 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{3} n + n^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{3} n^2 + \frac{1}{3} n$$

