

Lineære ligningssystemer

Løse ligninger på følgende form: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$

Lineære ligninger i de ubekendte $x_1, \dots, x_n$ over $\mathbb{F}$

$a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ er et legeme)

(pragmatisk: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

Løsning til lineære ligning er en n -tuplet

$(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}$ som opfylder $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$

Ek:

$x_1 + 2x_2 = 3$ over $\mathbb{R}$

$(1, 1)$ er en løsning

$(3, 0)$ er en løsning

$(3+2i, -i)$ er ikke da vi
arbejder over $\mathbb{R}$
Selvom den løser ligning

Ek:

$x_1 + 2x_2 = 3$ over $\mathbb{C}$

$(1, 1), (3, 0), (3+2i, -i)$ er alle løsninger da det er over $\mathbb{C}$

System

Definition 6.1.3

Et lineært ligningssystem over $\mathbb{F}$
med m ligninger og n ubekendte $x_1, \dots, x_n$
er et system.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(alle koefficienter og højre side)
er over $\mathbb{F}$



a_{ij} koefficienter
 b_j højre side
 $a_{ij}, b_j \in \mathbb{F}$

En løsning til systemet er

$(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$

som opfylder alle m
ligninger

Sådan et system kaldes homogent hvis alle højresider er 0. Har altid en løsning
Hvis mindst én højreside ikke er 0, kaldes systemet inhomogent

Eksempel

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (0,0,0) \text{ er en løsning} \\ (1,2,1) \quad (-1,2,-1) \\ \text{er løsninger} \end{array}$$

hvorfor?

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b_1 \quad (\text{første ligning fra det givne system})$$

$$\begin{array}{l} \text{vi ved} \\ a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n = b_1, 0 \quad \text{vi ved at det er homogent} \\ \text{og} \quad a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n = b_1, 0 \quad \text{så} \end{array}$$

Derfor:

$$a_{11}(v_1 + w_1) + a_{12}(v_2 + w_2) + \dots + a_{1n}(v_n + w_n) = 0 + 0$$

$$\text{konklusion: } (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \text{ er løsning til ligning } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

På lignende måde ses at hvis $(v_1, \dots, v_n)$ og $(w_1, \dots, w_n)$ er løsninger til den i -te ligning $(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i)$ så er $(v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$ også løsning til den i -te ligning.

Samme hvis de løsning til alle i

Sætning 6.1.1

givet et homogent lineært ligningssystem over $\mathbb{F}$ (m ligninger og n ubekendte)

Da gælder

1) $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^n$ er altid en løsning

2) Hvis $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ er en løsning så er $(c \cdot v_1, c \cdot v_2, \dots, c \cdot v_n)$ også for alle $c \in \mathbb{F}$

3) Hvis $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ og $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ er løsninger til det givne system, så er

$(v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$ også en løsning til givne givne system

Sætning 6.1.2

Hvis et inhomogent lineært ligningssystem

har en løsning $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$

så er enhver anden løsning på formen:

$(v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$, hvor $(u_1, \dots, u_n)$ er løsning er løsning til det tilhørende homogene lineære ligningssystem

Ekse

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{over } \mathbb{R}$$

har tilhørende homogene system

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

partikuler

$(1, 1, 1)$ er løsninger til det inhomogene system

$(0, 0, 0), (1, -2, 1), (-1, 2, -1)$ er løsninger til det homogene system

ifølge sætning 6.1.2

$$\left. \begin{array}{l} (1+0, 1+0, 1+0) = (1, 1, 1) \\ (1+1, 1-2, 1+1) = (2, -1, 2) \\ (1-1, 1+2, 1-1) = (0, 3, 0) \end{array} \right\} \text{ er løsninger til den inhomogene}$$

Eksempel (inhomogent, ingen løsninger)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Har ingen løsning

Compact notation for a system of linear equations

Matricer

serie

række

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ systemets koefficientmatrix}$$

$$T = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \text{ Systemets totalmatrix}$$

↑ serier og række serier

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Eksempel

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases} \text{ over } \mathbb{R}$$

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 16 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 15 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ 6x_3 = -1 \end{cases} \text{ Nu er det nemmere at løse systemet}$$

$6x_3 = -1$ kaldes backvards substitution

Finde løsninger

gør det givne system enklere (men samme løsninger)

Eks. 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \text{ over } \mathbb{R}$$

Har samme løsningsmængde som

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \text{ ligning 2 minus ligning 1}$$

Har samme løsningsmængde som

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \text{ Ligning 1 minus ligning 2}$$

Vælg $x_3 = 1$, f.eks. $x_1 = 1$ og $x_2 = 1$

Vi kan bruge følgende 3 typer af "operationer" til at simplificere systemet

- 1) byt om på to rækker (løsninger) $R_i \leftrightarrow R_j$ (bytter række i og j)
- 2) gang en række med en konstant forskelligt fra nul ($R_i \leftarrow c \cdot R_i$) (bytter række i med R i gange konstant)
- 3) Gang en række med en konstant og læg resultatet til en anden række ($R_i \leftarrow R_i + d \cdot R_j$) (bytter række i med R j gange konstant)

Fløtør

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{6} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

det løsningsystem blev:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{3}{2} \\ x_3 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Derfor har systemet vi startede med kun én løsning: $(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{6})$

Trappematrix

Gensætte

givet en totalmatrix så kan man bruge rækkeoperationerne til at modificere matricen til en der opfylder:

- 1) Rækker med kun nul er nedst i matricen
- 2) To forskellige ikke-nul rækker har deres pivot element i forskellige søjler og pivotelementet i den nedste række er mere til højre end i den øverste række.

En matrix der opfylder krav 1 og 2 kaldes en trappematrix

Er følgende yderligere to krav kaldes matricen en reduceret trappematrix

- 3) Første ikke nul element i en række er lig med 1 (pivotelementet er alle 1)
- 4) Hvis en søjle indeholder et pivotelement så er alle andre elementer i søjlen 0.

Pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivot ↑

Første ikke nul indgang af en række kaldes rækken element Pivot

Opgaver

1a

inhomogent

1b

$$\begin{aligned} (1,1,1) \text{ nej} & \quad (0,0,1) \text{ ja} \\ 3 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + 1 &= -3 \neq 1 \quad 0 - 0 + 1 = 1 \\ 11 - 1 + 4 &= 14 \neq 4 \quad 0 - 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

1c

$$\begin{cases} 3x - 7y + z = 0 \\ 11x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

1d

$$(27, 1, -73)$$

2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 9x_3 = -1 \end{cases}$$

b

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2d

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2e

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{1}{5} \\ x_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

3

3a

A, B, D er på trappform

D er på reduceret trappform

3b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

5

5a

Bedste række er nul-række, så forbliver den. Første række vil blive norm (1, 0, 0, 0) da det første nul skal være den x_1 's pivot sammen med x_2 . x -variablerne er der der vi ikke kender deres værdi, så de må regne.

5b

Først, når man sætter sig i søvne, så er der ubalancer i alle ligninger og finder en løsning, så så (altså en løsning) og så kan man finde løsninger.

6) a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \text{ over } \mathbb{R}$ b) Nej den vil altid have løsning $(0,0,\dots,0)$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \text{ over } \mathbb{R}$ (løsninger: $(0,0), (1,-1), \dots$)

7) a) dens reducerede trappelform: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det ses: $x_1 = -x_4$, $x_2 = 1 - 5x_4$, $x_3 = 1 + 9x_4$. ved $x_4 = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. ved $x_4 = 1$: $x_1 = -1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 10$. gælder gælder. b) Fra før: $x_1 = -t$, $x_2 = 1 - 5t$, $x_3 = 1 + 9t$, $x_4 = t$.

8) Din totalmatrix ser sådan ud:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_4 \end{bmatrix}$ eller på anden form $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = c_4 \end{cases}$