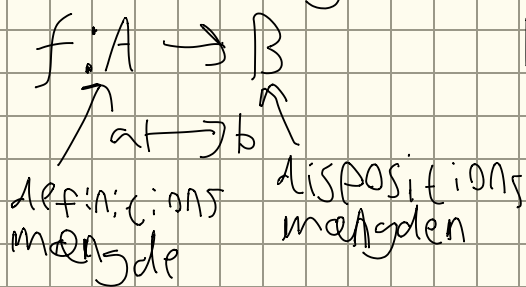


Lineære afb. i ninger

fra tidligere:



billedmængde: $f(A) = \text{image}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$
 $= \{b \in B \mid \text{der findes } a \in A: \text{så } b = f(a)\}$

f injektiv: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

f surjektiv: $\text{image}(f) = B$

$f: A \rightarrow B$ $g: B \rightarrow C$
sammensat funktion

$g \circ f: A \rightarrow C$
 $a \mapsto g(f(a))$

$f: A \rightarrow B$ funktion

f kaldes invertibel hvis der er en funktion;

$f^{-1}: B \rightarrow A$, så $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ og $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$
altså $f(f^{-1}(b)) = b$ og $f^{-1}(f(a)) = a$

Lineære afb. i ninger/funktioner

lad V og W være vektorrum over F

en funktion $L: V \rightarrow W$ kaldes en lineær afb. i ning hvis

1) $L(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = L(\underline{v}_1) + L(\underline{v}_2)$ for alle $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

2) $L(c \cdot \underline{v}) = c \cdot L(\underline{v})$ for alle $c \in F$ og $\underline{v} \in V$

Eksempler

vælg $a \in \mathbb{R}$

$L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en lineær afbildning:
 $x \mapsto a \cdot x$

$$\begin{aligned} \text{tjek 1)} \quad L(x_1 + x_2) &= a \cdot (x_1 + x_2) \\ &= ax_1 + ax_2 \\ &= L(x_1) + L(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(c \cdot x_1) &= a \cdot c \cdot x_1 \\ &= c \cdot a \cdot x_1 \\ &= c \cdot L(x_1) \end{aligned}$$

Eksempler

vælg $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bemærk $f(0) = b \neq 0$

$x \mapsto ax + b$ ikke lineær afbildning

$\underline{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ vælges

$\underline{L}_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ er en lineær afbildning
 $\underline{v} \mapsto \underline{A} \cdot \underline{v}$

$$\begin{aligned} \text{tjek 1)} \quad \underline{L}_A(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) &= \underline{A} \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \\ &= \underline{A} \cdot \underline{v}_1 + \underline{A} \cdot \underline{v}_2 \\ &= \end{aligned}$$

Generel sprogbrug / Definition (billederummet)

$L: V \rightarrow W$ en lineær afbildning
 $\uparrow$ definition
 $\uparrow$ rummet
 $\uparrow$ dispositions
 $\uparrow$ rummet

$$\begin{aligned}
 L(V) &= \text{image}(L) \\
 &= \{L(v) \mid v \in V\} \\
 &= \left\{ \underline{w} \in W \mid \begin{array}{l} \text{der findes } \underline{v} \in V \\ \text{så } \underline{w} = L(\underline{v}) \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Følgende: $\text{image}(L)$ er et underrum i W

vises (Lemmen 10.4.2) for alle $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \text{image}(L)$ skal tjekkes at $\underline{w}_1 + c \cdot \underline{w}_2$ også er i $\text{image}(L)$

Der findes $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ så $\underline{w}_1 = L(\underline{v}_1)$ og $\underline{w}_2 = L(\underline{v}_2)$

$$\underline{w}_1 + c \cdot \underline{w}_2 = L(\underline{v}_1) + c \cdot L(\underline{v}_2) = L(\underline{v}_1 + c \cdot \underline{v}_2)$$

fordi kan skrives som $\nearrow$ er det i billedet.

Lemmen 11.1.2

givet $\underline{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ $L_{\underline{A}}: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$

$$\underline{v} \mapsto \underline{A} \cdot \underline{v}$$

$$\text{image}(L_{\underline{A}}) = \text{colsp}(\underline{A})$$

$\underline{w} \in \text{image}(L_{\underline{A}}) \Leftrightarrow$ der findes $\underline{v} \in \mathbb{F}^n$ så

$$\underline{w} = L_{\underline{A}}(\underline{v}) = \underline{A} \cdot \underline{v}$$

Skrives $\underline{A} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

fås: $\underline{A} \cdot \underline{v} = v_1 \cdot \underline{a}_1 + v_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + v_n \cdot \underline{a}_n$
 er: $\text{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$

$$\text{Fnkt} \{ f_k : \text{image}(\underline{L}_A) = \text{span}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \text{colsp}(\underline{A})$$

Eksempler

① $C_\infty(\mathbb{R})$ det reelle vektorrum af alle vilkårligt ofte differentiable funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

for eksempel indeholder $C_\infty(\mathbb{R})$: $t \mapsto e^t, \cos(t), \sin(t), \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

$$D: C_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R})$$

$$f \mapsto f'$$

er lineær afbildning fordi:

$$1) (f+g)' = f' + g' \quad \checkmark$$

$$2) (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$D \circ D: C_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R})$$

$$f \mapsto f''$$

$D \circ D$ er også en lineær afbildning

② V et vektorrum over F ,

$$\dim(V) = n, \beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$$

en ordnet basis for V . Lad $\underline{v} \in V$

$$[\underline{v}]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in F^n \Leftrightarrow \underline{v} = c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_n \underline{v}_n$$

Afhjningsmatricer

$L: V \rightarrow W$ linear afhjning mellem vektorrum over $\mathbb{F}$
antag $\dim(V) = n$ og $\dim(W) = m$

$\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ ordnet basis for V

$\gamma = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$ ordnet basis for W

for $\underline{v} \in V$ er $L(\underline{v}) \in W$

givet $[\underline{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ ($\Leftrightarrow \underline{v} = c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_n \underline{v}_n$)

$$[L(\underline{v})]_{\gamma} = [L(c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_n \underline{v}_n)]_{\gamma}$$

notation:

$${}_{\gamma}[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} [L(\underline{v}_1)]_{\gamma} & \dots & [L(\underline{v}_n)]_{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$= [L(c_1 \underline{v}_1) + \dots + L(c_n \underline{v}_n)]_{\gamma}$$

$$= [c_1 \cdot L(\underline{v}_1) + \dots + c_n \cdot L(\underline{v}_n)]_{\gamma}$$

$$= c_1 [L(\underline{v}_1)]_{\gamma} + \dots + c_n [L(\underline{v}_n)]_{\gamma}$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ [L(\underline{v}_1)]_{\gamma} & \dots & [L(\underline{v}_n)]_{\gamma} \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ [L(\underline{v}_1)]_{\gamma} & \dots & [L(\underline{v}_n)]_{\gamma} \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot [\underline{v}]_{\beta}$$

Matricen ${}_{\gamma}[L]_{\beta}$ kaldes
 L 's afhjningsmatrix
med hensyn til de
ordnede baser β og γ

Bemerk (seening)
(11.3.4)

$${}_{\gamma}[L]_{\beta} \cdot [\underline{v}]_{\beta} = [L(\underline{v})]_{\gamma}$$

Eksempel $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\underline{L_A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\underline{v} \mapsto \underline{A} \cdot \underline{v}$$

$$\xi = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ den ordnede standardbasis for } \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} {}_{\xi}[\underline{L_A}]_{\xi} &= \begin{bmatrix} {}_{\xi}[\underline{L_A}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})]_{\xi} & {}_{\xi}[\underline{L_A}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})]_{\xi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\xi} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{A} \end{aligned}$$

Mer generelt

$$\underline{L_A}: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$$

$$\underline{v} \mapsto \underline{A} \cdot \underline{v} \quad (\underline{A} \in \mathbb{F}^{m \times n})$$

ξ_1 ordnet standardbasis for $\mathbb{F}^n$

ξ_2 det samme for $\mathbb{F}^m$

$$\text{Så gælder } {}_{\xi_2}[\underline{L_A}]_{\xi_1} = \underline{A}$$

Eksempel

$V = \text{span}_{\mathbb{R}}(1, z)$ underum i $\mathbb{R}[z]$

$W = \text{span}_{\mathbb{R}}(1, z, z^2)$

V har ordnetbasis
 $\beta = (1, z)$

$L: V \longrightarrow W$

W har: $\gamma = (1, z, z^2)$

$$P(z) \longmapsto (1+2z) \cdot P(z)$$

er lineær afbildning

$$\begin{aligned} {}_{\gamma}[L]_{\beta} &= \begin{bmatrix} [L(1)]_{\gamma} & [L(z)]_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1+2z]_{\gamma} & [z+2z^2]_{\gamma} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kontrol: $L(1+z)$ beregnes på to måder

direkte: $L(1+z) = (1+2z) \cdot (1+z) = 1+z+2z+2z^2$
 $= 1+3z+2z^2$

ved at bruge ${}_{\gamma}[L]_{\beta}$, man ved $[L(v)]_{\gamma} = {}_{\gamma}[L]_{\beta} \cdot [v]_{\beta}$

$$\begin{aligned} \text{Derfor } [L(1+z)]_{\gamma} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot [1+z]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+0 \\ 2+1 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Derfor: $L(1+z) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot z + 2 \cdot z^2 = 1+3z+2z^2$

Opgaver

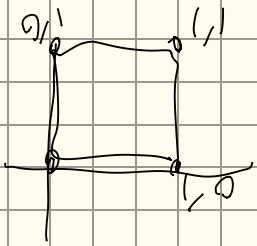
1 a

$$g\left(\begin{bmatrix} 2+2 \\ 4+4 \end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) + g\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

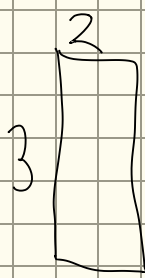
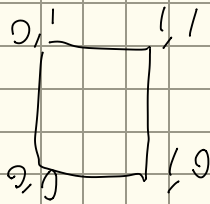
b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ker(t) = \{t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) $\{t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ base of order base $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2 a



b



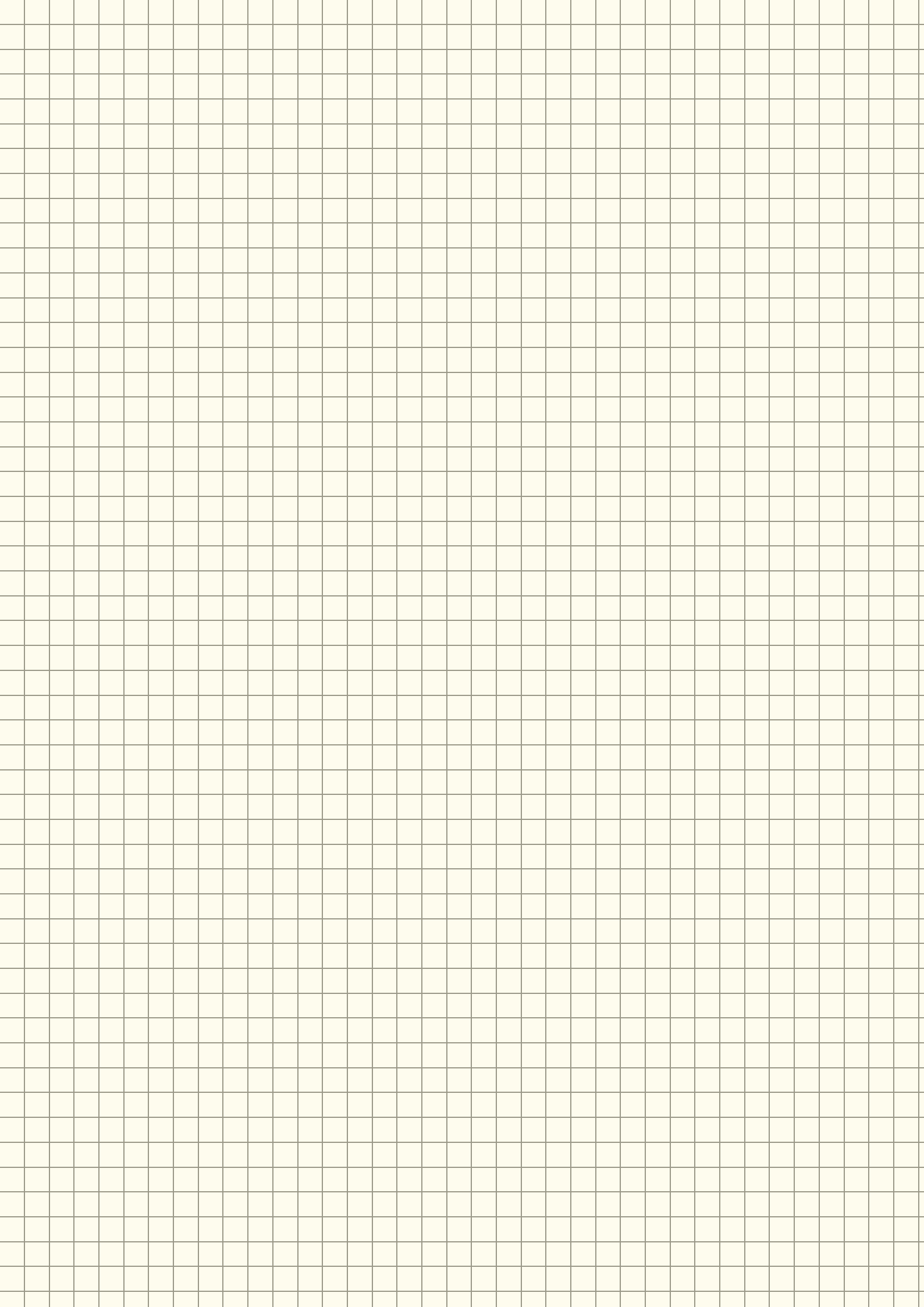
c)

$$\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \cdot 0$$

d)

$$1 \cdot 1 = 2 \cdot 0$$

3



L:119 dag

Brug ${}_Y[L]_B \in \mathbb{R}$ til at beregne

1) beregne $\ker(L)$ og $\text{image}(L)$

2) Løse ligninger $L(v) = \underline{w}$ $\underline{w} \in W$

specielt tilfælde for ① $L_{\underline{A}}: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$

$$\ker(L_{\underline{A}}) = \{ \underline{v} \in \mathbb{F}^n \mid \underline{A} \cdot \underline{v} = \underline{0} \} \quad \underline{v} \mapsto \underline{A} \cdot \underline{v}$$

$$= \ker(\underline{A})$$

$$\text{image}(L_{\underline{A}}) = \{ \underline{w} \in \mathbb{F}^m \mid \text{der er } \underline{v} \in \mathbb{F}^n \text{ s.d. } \underline{A} \cdot \underline{v} = \underline{w} \}$$
$$= \text{colsp}(\underline{A})$$

Dimensionsætning:

$$\dim(\ker(\underline{A})) + \dim(\text{colsp}(\underline{A})) = n$$

Generelt

$$L: V \rightarrow W \quad \ker(L) = \{ \underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) = \underline{0} \}$$

$$\underline{v} \in \ker \Leftrightarrow L(\underline{v}) = \underline{0} \Leftrightarrow [L(\underline{v})]_Y = [\underline{0}]_Y = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}_Y[L]_B \cdot [\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [\underline{v}]_B \in \ker({}_Y[L]_B)$$

Man hat $\forall s \in \text{image}(L)$

$$\Leftrightarrow [w]_{\gamma} \in \text{colsp}(\gamma[L]_{\beta})$$

Beispiel

$$V = \{a + bz + cz^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$\beta = (1, z, z^2)$ ordnat. Basis für V

$$[a + bz + cz^2]_{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$W = \mathbb{R}^2 \quad \gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$L: V \rightarrow W$$
$$p(z) \mapsto \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

$$_{\gamma}[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} [L(1)]_{\gamma} & [L(z)]_{\gamma} & [L(z^2)]_{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\gamma} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\gamma} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\ker(L)$ berechnen via $_{\gamma}[L]_{\beta}$

erst berechnen $\ker _{\gamma}[L]_{\beta}$

$$_{\gamma}[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \ker _{\gamma}[L]_{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2c = 0 \\ b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ -3c \\ c \end{bmatrix}$$

$$= c \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{dus } \ker(L) = \text{span}_{\mathbb{R}}(2 - 3z + z^2)$$

