

Egenvektorer og egenverdier

Definition 12.1.1

V et vektorrum over $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n$

$L: V \rightarrow V$ lineær afbildning

hvis $\underline{v} \in V$ ($\underline{v} \neq \underline{0}$) opfylder

$$L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v} \text{ for } \lambda \in \mathbb{F}$$

så kaldes $\underline{v}$ en egenvektor og λ den tilhørende egenverdi for en given lineær afbildning L .

Problem (egenverdi problemet)

given L , bestem alle mulige egenverdier og egenvektorer

Bemærk

$L(\underline{0}) = \underline{0}$ og derfor gælder $L(\underline{0}) = \lambda \cdot \underline{0}$ for alle λ

Definition 12.1.2

$\underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ en kvadratisk matrix

$\underline{v} \in \mathbb{F}^n$ ($\underline{v} \neq \underline{0}$) som opfylder $\underline{A} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$ for $\lambda \in \mathbb{F}$
kaldes egenvektor for $\underline{A}$ og λ den tilhørende egenverdi.

Eksempel

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\underline{A} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

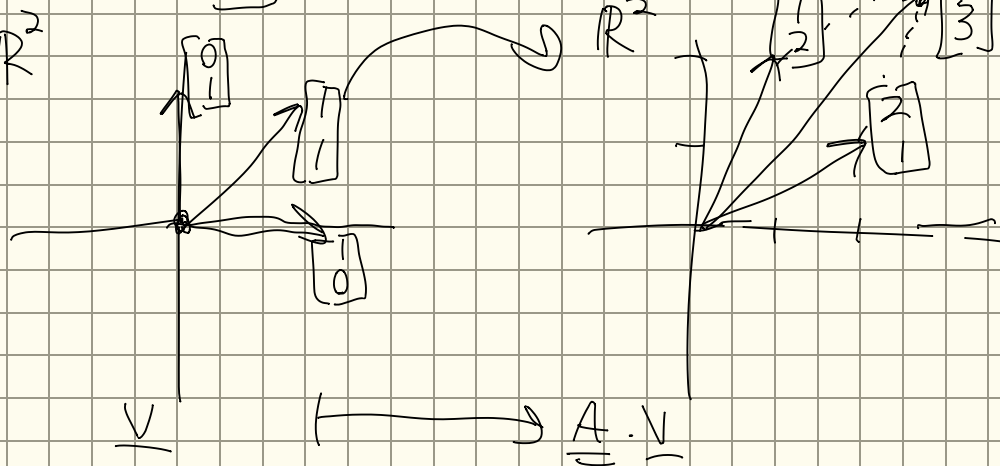
$$\underline{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ er}$$

ikke egenvektorer

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor

3'er egenverd.



$\lambda \in \mathbb{F}$ er egenverdi for $\underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$

$\Leftrightarrow$

$$\underline{A} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} \text{ for et } \underline{v} \in \mathbb{F}^n (\underline{v} \neq 0)$$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$$\underline{A} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{I}_n \cdot \underline{v}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{I}_n - \lambda \cdot \underline{I}_n \cdot \underline{v} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n) \cdot \underline{v} = 0 \quad (\underline{v} \neq 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\underline{v} \in \ker(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n) \quad (\underline{v} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \dim(\ker(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n)) > 0$$

dimensionsætning: $\dim(\ker(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n)) + \text{rang}(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n) = n$

$$\Leftrightarrow \text{rang}(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n) < n \Leftrightarrow \det(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n) = 0$$

Fx (fortsæt)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

eigenverdier for $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ skal oppfylle

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 4$$

$$(1-\lambda) = \pm 2 \quad \lambda = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

$\lambda = -1$ er egenverdi for $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. En tilhørende egenvektor finnes: $\underline{v} \in \ker(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n)$ ($\underline{v} \neq \underline{0}$)
dvs $\underline{v} \in \ker \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$
 $\underline{v} \in \ker \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix})$$

$$\underline{I} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \ker \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs for eksempel $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ med egenverdi, -1

Definition (karakteristiske polynomium)

$\underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, så kalles

$$P_{\underline{A}}(z) = \det(\underline{A} - z \cdot \underline{I}_n)$$

det karakteristiske polynomium of $\underline{A}$

$\lambda \in \mathbb{F}$ er egenverdi for $\underline{A}$

$$P_{\underline{A}}(\lambda) = 0$$

Fund med egenverdier for lineære afbildninger

$$L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v} \quad \underline{v} \in V \quad (\underline{v} \neq 0)$$

$\dim(V) = n$ vælges $\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ en ordnet basis for V

$$L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v} \Leftrightarrow [L(\underline{v})]_{\beta} = \lambda [\underline{v}]_{\beta} \Leftrightarrow {}_{\beta}[L]_{\beta} \cdot [\underline{v}]_{\beta} = \lambda \cdot [\underline{v}]_{\beta}$$

$\Leftrightarrow [\underline{v}]_{\beta}$ er en egenvektor for afbildningsmatricen

${}_{\beta}[L]_{\beta}$ med egenverdi λ

Vi har set

$\underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ λ en egenverdi for $\underline{A}$, de tilhørende egenvektorer er $\underline{v} \in \ker(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n)$.

Man siger

$$E_{\lambda} = \ker(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}_n) = \{ \underline{v} \in \mathbb{F}^n \mid \underline{A} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} \}$$

egenrummet for $\underline{A}$ hørende til egenverdien λ .

Hvis $L: V \rightarrow V$ er en lineær afbildning

$$E_{\lambda} = \ker(L - \lambda \cdot \text{id}_V) = \{ \underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v} \}$$

egenrummet for L hørende til egenverdien λ .

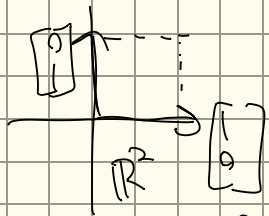
Varfor gælder ligheden?

$$L(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow L(v) = \lambda \cdot \text{id}_V(v)$$

$$\Leftrightarrow (L - \lambda \cdot \text{id}_V) \cdot v = 0 \Leftrightarrow \ker(L - \lambda \cdot \text{id}_V)$$

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



rotation
mod vektor over
 $\frac{\pi}{2}$ rad

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ingen egenvektorer!

WIKI: Hvis $\lambda \in \mathbb{R}$
er en egenverd; s.d.:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda)^2 - (-1) = \lambda^2 + 1$$

ingen rødder i $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$P_A(z) = \det(A - z \cdot I_2) = z^2 + 1$$

Er det karakteristiske polynomium for $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

rødder i $P_A(z)$ er i og $-i$

A har 2 egenverdier i og $-i$. E_i bestemmes:

$$E_i = \ker \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - i \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \ker \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & | & 0 \\ 1 & -i & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -i & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \ker(A - iI_2) \Leftrightarrow a - ib = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \cdot b \\ b \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad b \in \mathbb{C}$$

$$E_i = \text{span}_{\mathbb{C}} \left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

E_- : bestemmes

kompleks konjugering

$$\begin{aligned} \text{trick: } \underline{A} \cdot \underline{v} &= i \cdot \underline{v} \Leftrightarrow \underline{A \cdot v} = \underline{i \cdot v} \\ \text{fordi } \underline{A} \text{ kun} &\Leftrightarrow \underline{A \cdot v} = \underline{i \cdot v} \\ \text{har reelle} &\Leftrightarrow \underline{A \cdot v} = \overline{i \cdot v} = -i \cdot \overline{v} \\ \text{indgang} &\Leftrightarrow \underline{A \cdot v} = \overline{i \cdot v} = -i \cdot \overline{v} \end{aligned}$$

$gm(i) = \dim E_+ = 1$
 $cm(i) = 1$
 $p_A(z) = z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$
 $gm(-i) = 1$
 $cm(-i) = 1$

$\underline{v}$ er egenvektor til i svarende $-i$

fordi $E_- = \text{span}\left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ f.eks derfor er $E_- = \text{span}\left(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

Definition 12.2.1

(eller matrix $\underline{A}$)

Giver en egenverdi for en lineær afbildning L og $\lambda \in \mathbb{F}$ en egenverdi.

Egenverdiens algebraisk multiplicitet ($am(\lambda)$) er multipliciteten af roden λ i det karakteristiske polynomium.

Egenverdiens geometriske multiplicitet

($gm(\lambda)$) er dimensionen af E_λ .

Det kan vises at

$$1 \leq gm(\lambda) \leq am(\lambda) \leq n \quad \left(\begin{array}{l} \underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n} \\ L: V \rightarrow V \\ n = \dim(V) \end{array} \right)$$

Eksempel

$$V = \left\{ \underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \underline{\underline{M}}^T = \underline{\underline{M}} \right\}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ er en ordnet basis for } V, \dim(V) = 3$$

$$L: V \rightarrow V$$

$$\underline{\underline{M}} \mapsto \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T, \text{ hvor } \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For at bestemme L 's egenverdier og egenrum beregnes først en afbildningsmatrix ${}_{{}_\beta} [L]_{\beta}$

$${}_{{}_\beta} [L]_{\beta} = \left([L(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})]_{\beta}, [L(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})]_{\beta}, [L(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})]_{\beta} \right)$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bemærk, at $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for L med egenverdi 1

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

egenverdierne for ${}_{{}_\beta} [L]_{\beta}$ bestemmes (de er også L 's egenverdi)

$${}_{{}_\beta} [L]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_L(z) = \det \begin{bmatrix} 1-z & 2 & 1 \\ 0 & 1-z & 1 \\ 0 & 0 & 1-z \end{bmatrix}$$

Eneste rod er $\lambda = 1$

$$= (1-z) \cdot ((1-z)^2 - 1 \cdot 0) \\ = (1-z)^3$$

L har kun én egenverdi, nemlig $\lambda = 1$ $\dim(E_1) = 3$
 E_1 bestemmes

$$P[L]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Først beregnes } \ker(P[L]_B - 1 \cdot I_3)$$

$$P[L]_B - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} b=0 \\ c=0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \ker(P[L]_B - I_3) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\parallel \\ \text{span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_1 = \ker(L - \text{id}_V) = \text{span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\dim(E_1) = 1$$

Opgever

$$\downarrow$$
$$\underline{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2a

$$\begin{aligned} p_A(z) &= \det \left(\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} 5-z & 10 \\ 1 & 4-z \end{bmatrix} = (5-z) \cdot (4-z) - 10 \\ &= z^2 + z - 30 = (z-5) \cdot (z+6) \end{aligned}$$

radder: 605-5. mult: 7

$$\begin{aligned} \text{b) } E_{-6} &= \ker(\underline{A} - (-6) \cdot \underline{I}_2) \quad \underline{A} + 6 \cdot \underline{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ E_{-6} &= \left\{ \alpha \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \dim(E_{-6}) = 1 \end{aligned}$$

$v_1 = 10 \cdot v_2$

$$\text{c) } \dim(E_5) = 1 \quad \text{base: } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) 1. nej

$$2. (\cos(t))'' = (-\sin(t))' = -\cos(t). \quad -1$$

3. -1

$$4. 16. \ln(e^{4t})'' = 16e^{4t}$$

$$5. \text{nej. } \ln(t e^t)'' = 2e^t + t e^t.$$

4) a)

$$A - z \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 2-z & 2 \\ -1 & 4-z \end{bmatrix}$$

$$\det(\quad) = (2-z) \cdot (4-z) + 2$$

$$= z^2 - 6z + 10$$

$$\lambda = 3+i \text{ o } 3-i$$

$$b) A - (3+i)I_2 = \begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{span} \left(\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

5)

$$\mathcal{E}[\text{id}_{\mathbb{C}^2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [1]_{\mathcal{B}} & [0]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}[\text{id}_{\mathbb{C}^2}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} i/2 \\ -i/2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} & \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

Lille dag

Diagonalisering

V vektorrum over F , $\dim(V) = n$

$\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ en ordnet basis for V

$L: V \rightarrow V$ en lineær afb.ning

$\underline{v} \in V (\underline{v} \neq 0)$ kaldes en egenvektor for L hvis
 $L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$ for $\lambda \in F$ egenverd;

Antag at vektorene i β alle er egenvektorer for L

$$L(\underline{v}_i) = \lambda_i \cdot \underline{v}_i \text{ for } i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} {}_{\beta}[L]_{\beta} &= \begin{bmatrix} [L(\underline{v}_1)]_{\beta} & \dots & [L(\underline{v}_n)]_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\lambda_1 \cdot \underline{v}_1]_{\beta} & \dots & [\lambda_n \cdot \underline{v}_n]_{\beta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ diagonal matrix kun } \lambda_i \text{ p } \text{diagonalen} \end{aligned}$$

Definition 2.3.1

Ækvivalent: L kan diagonaliseres præcis hvis der findes β bestående af egenvektorer for L

$L: V \rightarrow V$ en lineær afb.ning

Man siger at den lineære afb.ning kan diagonaliseres hvis der findes en ordnet basis β for V s.d. ${}_{\beta}[L]_{\beta}$ er en diagonalmatrix.

Givet $\underline{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ er kvadratisk matrix.

Man siger at $\underline{A}$ kan diagonaliseres, hvis der findes en ordnet basis for $\mathbb{F}^n$ bestående af egenvektorer for $\underline{A}$

$\underline{L}_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ $\underline{A}$ kan diagonaliseres $\Leftrightarrow$ den lineære afbildning $\underline{L}_A$ kan diagonaliseres
 $\underline{v} \mapsto \underline{A} \cdot \underline{v}$

mat: hvornår findes en ordnet basis for V (hvv. $\mathbb{F}^n$) bestående af egenvektorer for L (hvv. $\underline{A}$)

λ egenverd; for L $E_\lambda = \{ \underline{v} / L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v} \}$ egenrummet tilhørende λ
 $\dim(E_\lambda) = gm(\lambda)$ geometrisk multiplicitet

λ er rod i $P_L(z)$, det karakteristiske polynomium
rods multiplicitet i $P_L(z)$: $am(\lambda)$ algebraisk multiplicitet

Det vides at $1 \leq gm(\lambda) \leq am(\lambda)$

Lemma 12.3.1

$L: V \rightarrow V$ givet

egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ (forskellige)

skriv $d_1 = gm(\lambda_1), d_2 = gm(\lambda_2), \dots$

E_{λ_1} har en ordnet basis $(\underline{v}_1^{(1)}, \dots, \underline{v}_{d_1}^{(1)})$ alle egenvektorer

E_{λ_2} har en ordnet basis $(\underline{v}_1^{(2)}, \dots, \underline{v}_{d_2}^{(2)})$

$\vdots$

E_{λ_r} har en ordnet basis $(\underline{v}_1^{(r)}, \dots, \underline{v}_{d_r}^{(r)})$

så er sættet

$$(\underline{v}_1^{(1)}, \dots, \underline{v}_{d_1}^{(1)}, \underline{v}_1^{(2)}, \dots, \underline{v}_{d_2}^{(2)}, \dots, \underline{v}_1^{(r)}, \dots, \underline{v}_{d_r}^{(r)})$$

lineært uafhængigt

nu har vi fundet $d_1 + d_2 + \dots + d_r$ mange lineært uafhængige egenvektorer

Hvornår gælder $d_1 + d_2 + \dots + d_r = n (= \dim(V))$?

Hvis ligningen er opfyldt, er sættet fra Lemma 12.3.1 en ordnet basis for V .

$$d_i = \dim(\lambda_i) \leq \dim(\lambda_i) = m_i$$

$$P_L(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \cdot \tilde{P}(z) \leftarrow \text{konstant for hver } i$$

$$\text{Dvs: } P_L(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \cdot (z - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_r)^{m_r} \cdot q(z)$$

$$\text{des } P_L(z) = n \geq m_1 + m_2 + \dots + m_r$$

$$(n = \dim(V))$$

$$\text{Bemærk: } d_1 + d_2 + \dots + d_r \leq m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq n$$

↑
lighed gælder når:

$$d_1 = m_1, d_2 = m_2, \dots, d_r = m_r$$

↑

lighed gælder når:
 $q(z)$ er en konstant

Señning:

$L: V \rightarrow V$ kan diagonaliseres præcist hvis følgende to krav er opfyldt:

① $gm(\lambda) = cm(\lambda)$ for alle egenverdier af L

② hvis $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ er de forskellige egenverdier for L så

$$p_L(z) = c \cdot (z - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_r)^{m_r}$$

↑
konstant (faktisk $c = (-1)^n$)

Eksempel

$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ kan L diagonaliseres?

$\epsilon = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ orkede standardbasis

$${}_{\epsilon}[L]_{\epsilon} = \begin{bmatrix} {}_{\epsilon}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}_{\epsilon}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{A}$$

$$p_{\underline{A}}(z) = \det\left(\begin{bmatrix} -z & -1 \\ 1 & -z \end{bmatrix}\right) = z^2 + 1. \text{ Ingen (reelle) egenverdier}$$

Dvs: L (hvv. $\underline{A}$) ikke kan diagonaliseres

Eksempel

↑
sammen som men $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$

$$p_{\underline{A}}(z) = z^2 + 1 = (z - i)^1 \cdot (z + i)^1$$

egenverdier: i og $-i$. $cm(i) = 1$, $cm(-i) = 1$ og derfor

$$gm(i) = 1, gm(-i) = 1.$$

$\underline{A}$ kan diagonaliseres

Frå sidste gang: $E_1 = \text{span}_{\mathbb{C}}\left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ og $E_{-1} = \text{span}_{\mathbb{C}}\left(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$\beta = \left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ er en ordnet basis for $\mathbb{C}^2$ bestående af egenvektorer for $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Dvs: ${}_{\beta} [L_A]_{\beta} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

vi ved ogs ${}_{\xi} [L_A]_{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

${}_{\beta} [L_A]_{\beta} = {}_{\beta} [\text{id}_{\mathbb{C}^2} \circ L_A]_{\beta} = {}_{\beta} [\text{id}_{\mathbb{C}^2}]_{\beta} \circ {}_{\xi} [L_A]_{\xi}$

$= {}_{\beta} [\text{id}_{\mathbb{C}^2}]_{\beta} \circ {}_{\xi} [\text{id}_{\mathbb{C}^2} \circ L_A]_{\xi} = {}_{\beta} [\text{id}_{\mathbb{C}^2}]_{\beta} \circ {}_{\xi} [L_A]_{\xi} \circ {}_{\xi} [\text{id}_{\mathbb{C}^2}]_{\xi}$

dvs. $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$L_A = L_A \circ \text{id}_{\mathbb{C}^2}$

$\downarrow$

$\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Opgaver

1) $p(z) = \det \begin{pmatrix} 9-z & -6 \\ 8 & -7-z \end{pmatrix} = (9-z) \cdot (-7-z) + 48 = -63 + z^2 - 2z + 48$
 $= z^2 - 2z - 15 = (z+3) \cdot (z-5)$
 eigenverdier: -3 og 5

$\dim(3) = 1$ og $\dim(-5) = 1$. da $1 \leq \dim(1) \leq \dim(1)$ må
 $\dim(3) = 1$ og $\dim(-5) = 1$

$E_3 = \ker(A + 3 \cdot I_2) = \ker \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$E_5 = \ker(A - 5 \cdot I_2) = \ker \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P \begin{bmatrix} L_A \\ I \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -15 & 7.5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2

$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - z \cdot \frac{I}{3} \right) = \det \begin{pmatrix} 1-z & 0 & 0 \\ 1 & 1-z & 1 \\ 1 & 0 & 2-z \end{pmatrix} = (1-z) \cdot (1-z) \cdot (2-z)$
 $= (z-1)^2 \cdot (z-2) \cdot (-1)$

eigenverdier: 2 og 1

$\ker(A - 1 \cdot I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ y \\ z \end{bmatrix}$
 $\dim(2) = 1$ og $\dim(1) = 2$
 $z = 1$ og $y = 0$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $z = 0$ og $y = 1$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\dim(1) = 2$

$$\ker(\underline{A} - 2\underline{I}_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Satz}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad {}_{\beta}[\underline{A}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad {}_{\beta}[\underline{A}]_{\beta} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\beta} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta} & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$