

Differentialisering

En n 'te ordens differentiel ligning er en ligning, der indeholder funktion $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ samt nogen af dens afledte $f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$

Eksempler

$$\begin{array}{ll} 1) f'(t) = 2 \cdot f(t) + 5e^t & (n=1) \\ 2) f''(t) \cdot f(t) = f'(t) & (n=2) \end{array}$$

Definition 13.9.2

En lineær differentiel ligning er en diff. ligning der kan skrives på formen

$$L(f(t)) = g(t), \text{ hvor } g(t) \in C_\infty(\mathbb{R})$$

og $L: C_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R})$ er en lineær afb. linng.

Eksemplet (1) er en diff. ligning

$$f'(t) = 2f(t) + 5e^t$$

$$f'(t) - 2f(t) = 5e^t$$

$$\underbrace{f'(t)}_{L(f(t))} - \underbrace{2f(t)}_{g(t)} = 5e^t$$

$$L(c \cdot f(t)) = (c \cdot f(t))' - 2 \cdot (c \cdot f(t)) =$$

$$L(f(t)) + g(t) = (f(t) + g(t))' -$$

$$2(f(t) + g(t)) = f'(t) + g'(t) -$$

$$2f(t) - 2g(t) = f'(t) - 2f(t) +$$

$$g'(t) - 2g(t) = \underbrace{L(f(t)) + L(g(t))}$$

Løsningsstruktur af $L(f(t)) = g(t)$

frat for: $L: V \rightarrow W$ V, W vektorrum

1) $w \notin \text{Image}(L)$ har ligning $L(v) = w$ ingen løsning

2) $w \in \text{Image}(L)$ har løsninger udseende:

$$\underline{v} = \underline{v}_{\text{par}} + \underline{v}_{\text{hom}} \quad \begin{array}{l} \text{partikulær løsning} \\ \text{↗} \\ \text{løsninger til } L(v) = 0 \end{array}$$

speciatiser til

$$L: C_{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow C_{\infty}(\mathbb{R})$$

løsningerne til en diff. ligning

$L(f(t)) = g(t)$ har udseende

$$f(t) = f_{\text{par}}(t) + \underbrace{f_{\text{hom}}(t)}_{L(f_{\text{hom}}(t)) = 0}$$

Seening 13.1.1 (1. ordens, lineær) Ponserformien

La $a(t), g(t) \in C_{\infty}(\mathbb{R})$ være givet

Diff. ligning: $f'(t) = a(t) \cdot f(t) + g(t)$

har løsningerne:

$$f(t) = \underbrace{e^{p(t)} \int e^{-p(t)} \cdot g(t) dt}_{\text{partikulær løsning}} + \underbrace{C \cdot e^{p(t)}}_{\text{alle løsninger til } f'(t) = a(t) \cdot f(t)} \quad (C \in \mathbb{R})$$

hvor $p(t)' = a(t)$

↑
partikulær
løsning

alle løsninger til
 $f'(t) = a(t) \cdot f(t)$

Hvor kommer formelen fra?

$$f'(t) - a(t) \cdot f(t) = q(t)$$

$$e^{-P(t)} \cdot f'(t) - e^{-P(t)} \cdot a(t) \cdot f(t) = e^{-P(t)} \cdot q(t)$$

Bruger produktreglen og kæderege

$$(e^{-P(t)} \cdot f(t))' = e^{-P(t)} \cdot q(t)$$

$$e^{-P(t)} \cdot f(t) = \int e^{-P(t)} \cdot q(t) dt + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

ganges med $e^{P(t)}$, fås formen fra sætningen

Eksempel $f'(t) = 2 \cdot f(t) + 5e^t$

Løs diff. ligning vha. Panserformlen

vælg $a(t) = 2, q(t) = 5e^t, P(t) = 2t$

$$\int e^{-P(t)} \cdot q(t) dt = \int e^{-2t} \cdot 5e^t dt = \int 5e^{-t} dt$$

$$(e^{kt})' = k \cdot e^{kt}$$

$$f(t) = e^{2t} \cdot (-5e^{-t}) + C \cdot e^{2t} \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$= \underbrace{-5e^t}_{\text{partikulær}} + \underbrace{C \cdot e^{2t}}_{\text{den fuldstændige løsning til } f'(t) = 2 \cdot f(t)} \quad (C \in \mathbb{R})$$

partikulær
løsning

den fuldstændige løsning til
 $f'(t) = 2 \cdot f(t)$

Eksempel $f'(t) = 2 \cdot f(t) + 5e^t$

Løs ved at gætte en partikulærløsning
prøv at finde en part. løsning på formen:

$$f'(t) = k \cdot e^t, \quad k \text{ en konstant}$$

$$(k e^t)' = 2 \cdot k e^t + 5 e^t$$

||

$$k e^t \text{ dvs } k = 2k + 5 \quad f(t) = -5 e^t \text{ er en part. løsning}$$
$$k = -5$$

løs den tilhørende homogene ligning $f'(t) = 2f(t)$

Løsningerne er $f(t) = c \cdot e^{2t} \quad (c \in \mathbb{R})$

Derfor har $f'(t) = 2f(t) + 5e^t$ den fuldstændige
løsning

$$f(t) = -5e^t + c \cdot e^{2t} \quad (c \in \mathbb{R})$$

Begyndelsesværdi problemet

Et krav som $f(t_0) = y_0$, for givne $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ kaldes en begyndelsesbetingelse

Eksempel $f'(t) = 2 \cdot f(t) = 5e^t$

$$f(0) = 7$$

$$\text{vi ved at } f(t) = -5 \cdot e^{-t} + C \cdot e^{2 \cdot t} \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\text{Derfor } f(0) = -5 + C \text{ og } f(0) = 7$$

$$-5 + 7 = C \quad C = 7 + 5 = 12$$

Den ønskede løsning er

$$f(t) = -5e^{-t} + 12 \cdot e^{2t}$$

$f'(t) = \lambda \cdot f(t) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
har fuldstændig løsning

$$f(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad C \in \mathbb{R}$$

Systemer af 1. ordens diff. ligninger
med konstante koefficienter

$$\begin{cases} f_1'(t) = a_{11} \cdot f_1(t) + a_{12} \cdot f_2(t) + \dots + a_{1n} \cdot f_n(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) = a_{n1} \cdot f_1(t) + a_{n2} \cdot f_2(t) + \dots + a_{nn} \cdot f_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

hvis $g_1(t), \dots, g_n(t) \equiv 0$ kaldes systemet
homogent ellers inhomogent

omskrevet med lineær algebra

skrives

$$\underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

så bliver systemet

$$\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t) + \underline{g}(t)$$

Vi betragter det inhomogene tilfælde $\underline{g}(t) = \underline{g}$

Antag at $\underline{v}$ er en egenvektor for $\underline{A}$

$$\underline{A} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Prøv at finde løsninger på formen $\underline{f}(t) = \underline{v} \cdot g(t)$
($g(t) \in C_\infty(\mathbb{R})$)

$$\underline{f}'(t) = \underline{v} \cdot g'(t) \quad \underline{A} \cdot \underline{f}(t) = \lambda \cdot \underline{v} \cdot g(t)$$

Vi vil $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$ og derfor fås:

$$\underline{v} \cdot g'(t) = \lambda \cdot \underline{v} \cdot g(t) \quad \text{dvs} \quad g'(t) = \lambda \cdot g(t) \quad \text{dvs} \quad g(t) = C \cdot e^{\lambda t}$$

Derfor: Hvis $\underline{v}$ er en egenvektor for $\underline{A}$ med egenvekt λ
Så er $\underline{f}(t) = \underline{v} \cdot C \cdot e^{\lambda t}$ en løsning til $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$

Antag at $\mathbb{R}^n$ har en ordnet basis
 $\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ bestående af egenvektorer for $\underline{A}$
 (egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) I så fald har $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$
 løsninger: $\underline{f}(t) = \underline{v}_1 \cdot c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \dots + \underline{v}_n \cdot c_n \cdot e^{\lambda_n t}$
 $(c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R})$

Øvelse 13.2.3

Antag at $\underline{A}$ kan diagonaliseres
 $\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ ordnet basis bestående af egenvektorer
 for $\underline{A}$ med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
 Definér $\underline{Q} = [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n]$ så er $\underline{f}(t) = \underline{Q} \cdot \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
 den fuldstændige løsning til systemet
 af diff. ligninger $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$

Vi ved allerede at de givne løsninger faktisk
 er løsninger til $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$.
 Er der flere løsninger? Nej!

Bemærk

$$\underline{D} = \underline{Q}^{-1} \underline{A} \underline{Q}, \text{ hvor } \underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \underline{f}'(t) &= \underline{A} \cdot \underline{f}(t) \\ \underline{D} &= \underline{Q}^{-1} \underline{A} \underline{Q} \quad (\underline{Q}^{-1} \cdot \underline{f}(t)) \\ \underline{Q}^{-1} \underline{f}'(t) &= \underline{Q}^{-1} \underline{A} \underline{Q} (\underline{Q}^{-1} \underline{f}(t)) \\ &= \underline{D} (\underline{Q}^{-1} \underline{f}(t)) \end{aligned}$$

$$J^0 f^0 S: \tilde{f}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tilde{f}(t)$$

$$\text{dvs: } \tilde{f}'_1(t) = \lambda_1 \tilde{f}_1(t), \dots, \tilde{f}'_n(t) = \lambda_n \tilde{f}_n(t)$$

$$\tilde{f}'_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \tilde{f}'_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$$

$$\text{DVS: } \underline{f}(t) = \underline{Q} \cdot \tilde{f}(t) = \underline{Q} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Vi fandte alle løsninger til $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$

Eksempel

$$\begin{cases} f'_1(t) = 2 \cdot f_1(t) + 3 f_2(t) \\ f'_2(t) = 2 f_1(t) + f_2(t) \end{cases} \quad \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{DVS} \quad \underline{f}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{f}(t) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi finder systemets fuldstændige løsning:

$$\begin{aligned} P_{\underline{A}}(z) &= \det \begin{pmatrix} 2-z & 3 \\ 2 & 1-z \end{pmatrix} = (2-z) \cdot (1-z) - 6 \\ &= z^2 - 3z - 4 \end{aligned}$$

Rødder: $P_{\underline{A}}(z)$ er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 4$

Egenrummet bestemmes:

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \ker(\underline{A} - (-1)\underline{I}_2) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$E_4 = \ker(A - 4 \cdot I_2) = \ker\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\underline{Q} = [\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Systemet $\underline{f}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{f}(t)$ har den fuldstændige

løsning:

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \underline{Q} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \cdot e^{-t} \\ c_2 \cdot e^{4t} \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot e^{4t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Besynelsesbetingelse $f_1(t_0) = y_0$

skal bruges til at
bestemme c_1 og c_2

$$\begin{cases} f_2(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Opgaver

1a

$$(t')^2 - 4e^{2t} \cdot t = 0$$

$$1 - 4te^{2t} = 0$$

$$1 = 4te^{2t}$$

nej

1b

$$((e^{2t})')^2 - 4e^{2t} \cdot e^{2t} = 0$$

$$(2e^{2t})^2 - 4e^{4t} = 0$$

$$4e^{4t} - 4e^{4t} = 0 \text{ Ja}$$

2a

$$(at+b)' - 3 \cdot f(t+b)$$

$$a - 3at - 3b = t$$

$$a - 3b = t + 3at$$

$$a - 3b = t \cdot (3a+1)$$

$$3a = -1, a = -\frac{1}{3}$$

$$3b = -\frac{1}{3}, b = -\frac{1}{9}$$

2b

$$f'(t) = a(t) \cdot f(t) + q(t)$$

$$f'(t) = 3 \cdot f(t) + 0 \quad a(t) = 3, q(t) = 0$$

$$f(t) = e^{3t} \cdot \int e^{-3t} \cdot 0 dt + C \cdot e^{3t}$$

$$f(t) = 0 + C \cdot e^{3t}$$

$$f(t) = C \cdot e^{3t} \quad C \in \mathbb{R}$$

2c

pgør $f(t) = f_{\text{part}}(t) + f_{\text{hom}}(t)$

$\nwarrow f'(t) - 3f(t) = t$
 $\nearrow f'(t) - 3f(t) = 0$

so:

$$f(t) = C \cdot e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$$

3a

$$(3 \cdot e^{(t)})' = 3 \cdot e^t \cdot e^{(t)}$$

$$f'(t) = e^t \cdot f(t) = e^t \cdot 3 \cdot e^{(t)}$$

3b

$$f(0) = c \cdot e^{e^0} = c \cdot e^1 = \frac{1}{e} \cdot e = 1 \quad c = \frac{1}{e}$$

$$f(t) = \frac{1}{e} \cdot e^{e^t}$$

4a

$$p_A(z) = \det \begin{pmatrix} 1-z & 8 \\ 1 & -1-z \end{pmatrix} = (1-z) \cdot (-1-z) - 8 = z^2 - 9 = (z-3) \cdot (z+3)$$

eigenw. 3, -3

$$E_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-3} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

4b

$$\underline{f}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \quad \underline{f}(t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

$$= \begin{pmatrix} 4c_1 - 2c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \quad c_1 = 1, c_2 = 2$$

$$5a \quad A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \quad \underline{g(t) = 0}$$

homogen

5b. ja

6a. ja

6b

$$\begin{cases} 8a + 5b = -3 \\ -10a - 7b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & | & -3 \\ -10 & -7 & | & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 5 & | & -3 \\ 10 & 7 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & | & -4 \\ 10 & 7 & | & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & | & -4 \\ 0 & -3 & | & -9 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & | & -4 \\ 0 & 1 & | & 6\frac{1}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & | & 8\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & 6\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -4\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & | & 6\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a = -4\frac{1}{3} \\ b = 6\frac{1}{3} \end{matrix}$$

6c

$$\underline{f(t)} = \begin{bmatrix} -13 \\ 3 \\ 6\frac{1}{3} \end{bmatrix} + c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{3t}$$

$$7 \quad \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13/3 \\ 19/3 \end{bmatrix} + c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -8/3 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 5 \\ -2 & -1 & | & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ -2 & -1 & | & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 2 & 1 & | & 8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Lille dag

Flan storedag

$$\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t) \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Antag at $\underline{A}$ kan diagonaliseres
($\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$) ordnet basis for $\mathbb{R}^n$

bestående af egenvektorer for $\underline{A}$

Den fuldstændige løsning er

$$\underline{f}(t) = c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \underline{v}_n e^{\lambda_n t} \quad (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}$$

Løsningsmængden til $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$

er $\text{Span}_{\mathbb{R}}(\underline{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \underline{v}_n e^{\lambda_n t})$

Hvad hvis $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres?
(over $\mathbb{R}$)
to tilfælde

Idag: $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kan diagonaliseres over $\mathbb{C}$

Eksempel

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$P_{\underline{A}}(z) = \det \begin{pmatrix} -1-z & -3 \\ 3 & -1-z \end{pmatrix}$$

$$= (-1-z)^2 + 9 = (1+z)^2 + 9$$

$$\text{egenverdier: } (1+\lambda)^2 + 9 = 0 \quad 1+\lambda = \pm 3;$$

$$(1+\lambda)^2 = -9 \quad \lambda_1 = -1+3i$$

$$\lambda_2 = -1-3i$$

Eigenrum:

$$E_{-1+3i} = \ker(\underline{A} - (-1+3i)\underline{I}_2)$$

$$\begin{bmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{DVS } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in E_{-1+3i} \Leftrightarrow a - i \cdot b = 0$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in E_{-1+3i} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fordi $\underline{A}$ er reel matrix, gælder $\underline{A} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

$$\text{Så } E_{-1-3i} = \text{Span}_{\mathbb{C}} \left(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \Leftrightarrow \underline{A} \cdot \underline{v} = \overline{\lambda} \cdot \underline{v}$$

Neglen til at løse 1. ordens systemer af diff. ligninger var:

1) man skal kunne diagonalisere A

2) man skal løse $f'(t) = \lambda \cdot f(t)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$)

vi betragter funktioner $f(t) = f_1(t) + i \cdot f_2(t)$

$$\operatorname{Re}(f(t)) = f_1(t)$$

$$\operatorname{Im}(f(t)) = f_2(t)$$

↑
reel
for

↑ ↑
reelle funktioner
 $f_1(t), f_2(t) \in C_\infty(\mathbb{R})$

$$\bar{f}(t) = f_1(t) - i \cdot f_2(t)$$

$$f(t) + \bar{f}(t) = 2 \cdot f_1(t)$$

$$f(t) - \bar{f}(t) = 2i f_2(t)$$

$$\text{Derfor: } \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(f(t), \bar{f}(t))$$

$$= \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re}(f(t)), \operatorname{Im}(f(t)))$$

$$f'(t) = f_1'(t) + i \cdot f_2'(t)$$

Eksempel:

polær form, kapitel 4

$$f(t) = e^{2it} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \checkmark$$

$$= \cos(2t) + i \cdot \sin(2t)$$

$$\operatorname{Re}(e^{2it}) = \cos(2t) \quad (e^{2it})' = (\cos(2t))' + i \cdot (\sin(2t))'$$

$$\operatorname{Im}(e^{2it}) = \sin(2t) \quad = -\sin(2t) + 2i \cos(2t)$$

$$(e^{2it})' = 2i \cdot (\cos(2t) + i \cdot \sin(2t))$$

$$= 2i \cdot e^{2it}$$

mere generelt: $(e^{\beta it})' = \beta i \cdot e^{\beta it} \quad (\beta \in \mathbb{R})$

Lemma 13.1.3 $\lambda \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, \lambda = \alpha + i \cdot \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$\operatorname{Re}(e^{\lambda t}) = e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$$

$$\operatorname{Im}(e^{\lambda t}) = e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t)$$

$$(e^{\lambda t})' = \lambda \cdot e^{\lambda t}$$

Dvs. $f'(t) = \lambda f(t)$ har den komplekse, fuldstændige
løsning $f(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad (c \in \mathbb{C})$

Section 13.2.5

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diagonaliserbar over $\mathbb{C}$

$(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ orthonormal basis for $\mathbb{C}^n$

$$\underline{A} \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \cdot \underline{v}_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

So har $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$ komplekse fuldstændige
løsning $\underline{f}(t) = c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \underline{v}_n e^{\lambda_n t} \quad (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$

Eksempel (fortsat) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = -1+3i$
 $\lambda_2 = -1-3i$

Systemet $\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$ har den komplekse
fuldstændige løsning

$$\underline{f}(t) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{(-1+3i)t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-1-3i)t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

Fra kompleks til reelt

Vi antager $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Derfor har $p_{\underline{A}}(z)$ reelle
koefficienter $\lambda \in \mathbb{R}$

Lemma 5.2.3: Givet komplekse rødder λ kommer i
par $\lambda, \bar{\lambda}$

A har egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$
 omskriv:

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ reelle egenverdier
 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ par af øjle komplekse
 egenverdier
 $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_s$

$$\begin{aligned} \underline{f}'(t) &= \underline{A} \cdot \underline{f}(t) \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} & \underline{f}(t) &= c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \underline{v}_n e^{\lambda_n t} \\ & & & (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}) \\ \underline{f}(t) &= \text{span}(\underline{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \underline{v}_r e^{\lambda_r t}, \underline{w}_1 e^{\mu_1 t}, \underline{w}_1 e^{\bar{\mu}_1 t}, \dots, \underline{w}_s e^{\mu_s t}, \underline{w}_s e^{\bar{\mu}_s t}) \\ & \parallel \quad \underline{A} \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \cdot \underline{v}_i & \underline{A} \cdot \underline{w}_1 &= \mu_1 \cdot \underline{w}_1 & \underline{A} \cdot \underline{w}_s &= \mu_s \cdot \underline{w}_s \\ & \text{span}(\underline{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \underline{v}_r e^{\lambda_r t}, \text{Re}(\underline{w}_1 e^{\mu_1 t}), \text{Im}(\underline{w}_1 e^{\mu_1 t}), \dots, \\ & \text{Re}(\underline{w}_s e^{\mu_s t}), \text{Im}(\underline{w}_s e^{\mu_s t})) \end{aligned}$$

Korollar 13.2.6:

$\underline{f}'(t) = \underline{A} \cdot \underline{f}(t)$ har den fuldstændige løsning:

$$\begin{aligned} \underline{f}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_r e^{\lambda_r t} + c_{r+1} \cdot \text{Re}(\underline{w}_1 e^{\mu_1 t}) + c_{r+2} \cdot \text{Im}(\underline{w}_1 e^{\mu_1 t}) \\ &+ \dots + c_{n-r} \cdot \text{Re}(\underline{w}_s e^{\mu_s t}) + c_{n-r+1} \cdot \text{Im}(\underline{w}_s e^{\mu_s t}) \\ & (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Answer

1a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P_A(z) = (2-z) \cdot (-2-z) + 5 \\ = z^2 + 1$$

1b)

$$\begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

1c)

$$f(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{it} + c_2 \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-it} \\ = \begin{bmatrix} c_1 \cdot (2+i)e^{it} + c_2 \cdot (2-i)e^{-it} \\ c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} \end{bmatrix}$$

2a)

$$a \cdot \begin{bmatrix} 4 \cos(t) \\ 2 \cos(t) \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -2 \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cos(t) - 2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{bmatrix}$$

2b)

$$(b \cdot i) \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{it} + (-bi) \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-it} = \begin{bmatrix} (2bi-b)e^{it} \\ bie^{it} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-2bi-b)e^{-it} \\ -bie^{-it} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2bie^{it} - be^{it} - 2bie^{-it} - be^{-it} \\ bie^{it} - bie^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2bi(e^{it} - e^{-it}) - b(e^{it} + e^{-it}) \\ bi(e^{it} - e^{-it}) \end{bmatrix}$$

$$= b \cdot \begin{bmatrix} 2i(e^{it} - e^{-it}) \\ i(e^{it} - e^{-it}) \end{bmatrix} - b \cdot \begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= b \cdot \begin{bmatrix} 2i \cdot (\cos(t) + i \sin(t) - (\cos(t) + i \sin(t))) \\ i \cdot (\cos(t) + i \sin(t) - (\cos(t) + i \sin(t))) \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} 2(\cos(t)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= b \cdot \begin{bmatrix} -4 \sin(t) - 2(\cos(t)) \\ -2 \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot -1 - 4 \cdot 0 \\ -2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a + 2b \\ -2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$a = -1.5$$

$$2b = -5 \quad b = \frac{-5}{2}$$

4a)

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot f_1(t) - 5f_2(t) + e^{2t} \\ f_1(t) - 2f_2(t) - e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_1 e^{2t} - 5d_2 e^{2t} + e^{2t} \\ d_1 e^{2t} - 2d_2 e^{2t} - e^{2t} \end{bmatrix} =$$

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 2d_1 - 5d_2 + 1 \\ d_1 - 2d_2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_1 e^{2t}) \\ (d_2 e^{2t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_1 e^{2t} \\ 2d_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2d_1 e^{2t} + e^{2t}(-5d_2 + 1) \\ -2d_2 e^{2t} + e^{2t}(d_1 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_1 e^{2t} \\ 2d_2 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(-5d_2 + 1) \\ e^{2t}(d_1 - 4d_2 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5d_2 e^{2t} = e^{2t} \Leftrightarrow 5d_2 = 1 \Leftrightarrow d_2 = \frac{1}{5}$$

$$d_1 e^{2t} = \frac{9}{5} e^{2t} \Leftrightarrow d_1 = \frac{9}{5}$$

4b ↑ lize fundit ↓ OBS

$$f(t) = f_{\text{par}}(t) + f_{\text{hom}}(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9e^{2t}}{5} \\ \frac{e^{2t}}{5} \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} 4\cos(t) - 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -2\cos(t) - 4\sin(t) \\ -2\sin(t) \end{bmatrix}$$

5a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(z) = (2-z) \cdot (-2-z) + 4 = z^2 - 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

kan ikke diagonaliseres

5b)

$$g_2'(t) = 0, g_2(t) = C_1$$

$$\underline{g}'(t) = \begin{bmatrix} g_2'(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_1'(t) = g_2(t) = C_1, g_1(t) = C_1 t + C_2$$

$$\underline{g}(t) = C_1 \cdot \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

$$5c) \quad Q^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\underline{g}(t) = Q^{-1} \cdot \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 2f_1(t) + f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ 2(C_1 t + C_2) + f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

$$2C_1 t + 2C_2 + f_2(t) = C_1$$

$$f_2(t) = C_1 - 2C_1 t - 2C_2$$

$$\underline{f}(t) = Q \cdot \underline{g}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ -C_1 t - 2C_2 + C_1 \end{bmatrix}$$