

Mat1a gennemgang

01001

Mathematics 1a (Polytechnical Foundation)

Student: Rasmus Rosendahl-Kaa (S255955)**Due:** 30 Nov 2025

Udsagnslogik

Important

Til eksamen: husk sandhedstabeller

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T

Ved $P \Rightarrow Q$ så hvis P er falsk, så vil $P \Rightarrow Q$ altid være sand. Hvis P er sand, skal Q også være sand.

Example

$$(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$$

Opskriv sandhedstabel

P	Q	R	$P \vee Q \vee R$	$(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	F	T	T	F
T	T	F	T	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	F
F	F	F	F	T

$$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$$

Mængder

Samling af elementer.

Kan være f.eks.:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, \dots\} \\ &\{a \in \mathbb{R} \mid P(a) \text{ er sandt}\} \end{aligned} \tag{1}$$

Man kan tegne mængderne grafisk.

Fællesmængder:

$$A \cap B$$

Hvad der er i både A og B

$$A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\} \tag{2}$$

Foreningsmængde:

$$A \cup B$$

Hvad der er i enten A eller B

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\} \tag{3}$$

Differens:

$$A/B$$

Hvad der er i A men ikke B

$$A/B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\} \tag{4}$$

Example

Tre mængder A, B, C .

Find følgende: $(A \cup B) \cap C$

Hvad der er i A eller B , og den del af det, som også er i C .

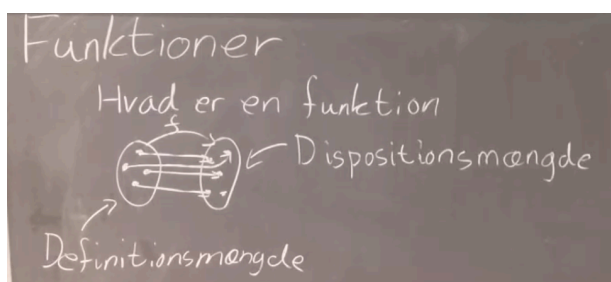
For opgaven:

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, 2\} \\ B &= \{1, 2, 3\} \\ C &= \{3, 4, 5\} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \text{hvad der er i } A \text{ eller } B \text{ så tal fra } 0-3 \\ (A \cap B) \cup C &= \text{Hvad der er i både tal fra } 0-3 \text{ og i } 3, 4, 5 \text{ så } 3 \\ (A \cap B) \cup C &= \{3\} \end{aligned} \tag{6}$$

Funktioner

Hvad er en funktion? Kan kaldes en matematisk process, som tager et element fra en mængde, og afbilder over på et element i en anden mængde.



$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned} \quad (7)$$

Værdimængden:

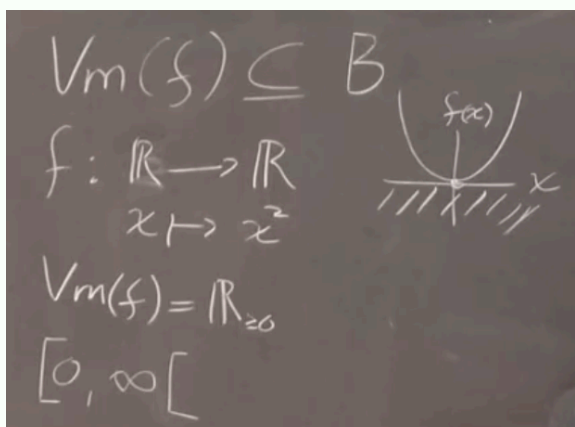
$$Vm(f), f(A)$$

Værdimængden er alle værdier $f(a)$ kan blive (alle elementer, der bliver ramt i dispositions-mængden)

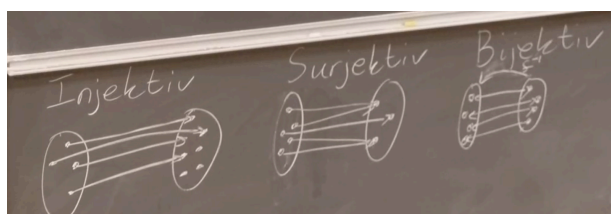
$$Vm(f) \subseteq B$$

Example

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \quad (8)$$



Injektive, surjektive og bijektive funktioner



Injektiv

Alle elementer i dispositions-mængden må kun rammes én gang. Dispositions-mængden her kan være større en værdimængden

Surjektiv

Alle elementer i dispositions-mængden skal rammes. Elementerne i dispositions-mængden må gerne rammes flere gange.

Bijektiv

En funktion, der både er injektiv og surjektiv. Dvs. alle elementer i definitionsområdet skal pege på ét element i værdimængden, og ét unikt element.

Notér her at hvis man tager den inverse funktion (hvor man vender pilen om), vil den inverse funktion stadig være bijektiv. Det gælder kun for bijektive funktioner, og ikke de andre.

Inverse funktion

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \\ f^{-1}/g &: B \rightarrow A \\ f(a) &\mapsto a \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= f(f^{-1}(x)) = f(g(x)) = \text{id}_B \\ f^{-1} \circ f &= f^{-1}(f(x)) = g(f(x)) = \text{id}_A \end{aligned} \tag{10}$$

Lemma (2.2.2)

En funktion har en invers hvis og kun hvis den er bijektiv

For inverse funktioner gælder ($f(x)$ er funktion, $g(x)$ er dens inverse):

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \text{id}_{\mathbb{R}} \\ g(f(x)) &= \text{id}_{\mathbb{R}} \end{aligned} \tag{11}$$

Example

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x - 7 \end{aligned} \tag{12}$$

Find en invers funktion f^{-1}

Solution:

Opstil funktion: $f(x) = 3x - 7$

Byt om på x og y ($f(x)$)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 7 \\ x &= 3y - 7 \Leftrightarrow \\ y &= \frac{x + 7}{3} = g(x) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= x \left(\frac{x+7}{3} \right) - 7 = x \\g(f(x)) &= \frac{(3x-7)+7}{3} = x\end{aligned}\tag{14}$$

Example

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\x &\mapsto x^2\end{aligned}\tag{15}$$

Solution:

Er ikke injektiv da f.eks. $f(-1)$ og $f(1)$ giver det samme
Er heller ikke surjektiv da der ikke fås nogle negative værdier.

Hvad med

$$\begin{aligned}g : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R} \\x &\mapsto x^2\end{aligned}\tag{16}$$

Solution:

Er Injektiv, da x kun må være positiv, og der er ikke 2 positive x-værdier, hvis x^2 giver det samme

Hvad med

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\x &\mapsto x^2\end{aligned}\tag{17}$$

Solution:

Er surjektiv, da alle positive tal bliver ramt, og du i dispositionsmængden ikke længere har de negative. Er ikke injektiv da du stadig har at $f(-1) = f(1) = 1$

Hvad med

$$\begin{aligned}k : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\x &\mapsto x^2\end{aligned}\tag{18}$$

Solution:

Er bijektiv, på grund af det samme som de to sidste to eksempler sat sammen.

Derfor findes k^{-1}

$$\begin{aligned} k^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{19}$$

Note

For $\sqrt{x}$ definerer vi kun svaret som det positive.

Men for $x^2 = 4$ defineres ± 2 som svaret.

Example

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} \\ x &= e^{2y} \\ \ln(x) &= \ln(e^{2y}) \\ \ln(x) &= 2y \\ y &= \frac{\ln(x)}{2} \end{aligned} \tag{20}$$

Note

For inverse funktioner, skal man huske at sørge for, at $f \circ f^{-1}$ skal give id_A og $f^{-1} \circ f = \text{id}_B$

Identitetsfunktionen

$$\begin{aligned} \text{id} : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x \end{aligned} \tag{21}$$

Funktionen, der basically ikke gør noget.

Sammensatte funktioner

$$f : A \rightarrow B \quad g : B \rightarrow C \tag{22}$$

$$\begin{aligned} f \circ g &: A \rightarrow C \\ f \circ g &= f(g(x)) \end{aligned} \tag{23}$$

Komplekse tal

Polynomier

Matricer