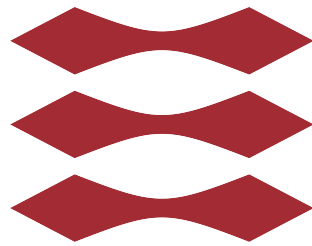


DTU



Funktioner 1

01002

Matematik 1b

Date: 03 February 2026

Semester: Spring 2026

Rasmus Rosendahl-Kaa

Funktioner

For at noget skal være en graf, må én input-værdi kun give én værdi.

Vektorfunktioner af flere variable

Definition (3)

Funktioner af typen $\underline{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ har $A = \text{dom}(f) \in \mathbb{R}^n$ kaldes vektorfunktioner af n variable.

$A = \text{dom}(f)$ - Definitionsmængden (domæne)

$\mathbb{R}^k = \text{codom}(f)$ - Dispositionsmængden (co-domænen)

$\text{im}(f) = \text{Vm}(f) = \{ \underline{f}(x) | x \in \text{dom}(f) \}$ - Værdimængden/billedrummet (image/range). Alt hvad funktionen kan ramme

$f = x \mapsto f(x)$

Input: $x \in \mathbb{R}^n$ - Søjlevektor i $\mathbb{R}^n$

Output: $\underline{f}(x) \in \mathbb{R}^k$ - Søjlevektor i $\mathbb{R}^k$

Example (1.3.1)

Lad $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{k \times n}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ f(x) &= A \cdot x \quad (f = x \mapsto Ax) \end{aligned} \tag{1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Ligning: $f(x) = y$, $y \in \text{codom}(f) = \mathbb{R}^k$

Er den injektiv? Nej, $f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Er den surjektiv? Nej, $\text{im}(f) = \text{span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \text{span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{col}(A)$

Koordinatfunktioner

Example

For vektorfunktionen: $A(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \end{bmatrix}$

$$f_1(\underline{x}) = 1x_1 + 2x_2$$

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_k(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$f_i : A \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$$

$$A = \text{dom}(f)$$

Example (1.2.2)

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = \sqrt{16 - x_1^2 - x_2^2}$$

$$\text{hvor } A = \text{dom}(f) \in \mathbb{R}^2$$

Typisk opgave: Hvad er A , $\text{codom}(f)$, $\text{im}(f)$

Find størst mulig A

$$\begin{aligned} 16 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ 4^2 - x_1^2 &\geq x_2^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{codom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \sqrt{16 - 0^2 - 0^2} = 4 \\ f(4, 0) &= \sqrt{16 - 4^2 - 0^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Så } \text{im}(f) = [0, 4]$$

Example (1.3.2 (ReLU))

$$\text{ReLU} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{ReLU}(x) = \max(0, x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{ReLU} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{ReLU}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \text{ReLU}(x_1) \\ \text{ReLU}(x_2) \\ \vdots \\ \text{ReLU}(x_n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Visualiseringer af funktioner (1.4 i bogen)

$$\text{Graf}(f) = \{(\underline{x}, f(\underline{x})) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid \underline{x} \in \text{dom}(f)\}$$

Se Eks 1.2.2. Ville kræve $n + k \leq 3$

Niveaukurver

Niveaukurver for $c \in \text{codom}(f)$ - c: output

$$\{\underline{x} \in \text{dom}(f) \mid f(\underline{x}) = c\}$$

Neuralt netværk (Def 1.3.2)

1. lag: $\underline{x} \mapsto \sigma_1(\underline{A}_1 \underline{x} + \underline{b}_1) = \underline{z}_1$

$$\underline{A}_1 \in \mathbb{R}^{50 \times 784}$$

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^{784} &\rightarrow \mathbb{R}^{50} \\ \sigma_1 : \mathbb{R}^{50} &\rightarrow \mathbb{R}^{50} \\ \sigma_1 &= \text{ReLU} \end{aligned} \tag{8}$$

2. lag:

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &\mapsto \sigma_2(\underline{A}_2 \underline{z}_1 + \underline{b}_2) = \underline{z}_2 \in \mathbb{R}^{10} \\ \underline{A}_2 &\in \mathbb{R}^{10 \times 50}, \underline{b}_2 \in \mathbb{R}^{10 \times 1} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= f_2 \circ f_1, \quad \mathbb{R}^{894} \rightarrow \mathbb{R}^{10} \\ f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ \Phi(\underline{x}) &= \sigma_2(\underline{A}_2 \sigma_1(\underline{A}_1 \underline{x} + \underline{b}_1) + \underline{b}_2) \end{aligned} \tag{10}$$

Kontinuitet

Definition (3.2.1)

En funktion $f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom}(f) \in \mathbb{R}$ er kontinuert i $x_0 \in A = \text{dom}(f)$ hvis $x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$ (ligning 3.1)

Ligning 3.1 betyder at for ethvert $\varepsilon > 0$ findes der et $\delta > 0$ således at $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{11}$$

Funktionen f er kontinuert hvis den er kontinuert i alle punkter i $\text{dom}(f)$

Example

Lad $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (12)$$

Påstanden: f er kontinuert

Solution:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |ax + b - (ax_0 + b)| \\ &= |ax - ax_0| = |a| |x - x_0| \end{aligned} \quad (13)$$

Lad ε være givet. Vi vælger $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$. Så

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< \delta = \frac{\varepsilon}{|a|} \\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| &= |a| |x - x_0| \\ &< |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon \end{aligned} \quad (14)$$

Example

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (15)$$

h er diskontinuert i $x_0 = 0$. Lad $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Der findes intet $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} \\ |x| < \delta &\Rightarrow |f(x) - 1| < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

Så

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-\delta}{2}\right) &= 0 \\ f\left(\frac{\delta}{2}\right) &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left|f\left(\frac{-\delta}{2}\right) - f(0)\right| &= |0 - 1| = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

Så funktionen er ikke kontinuert.

Example

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (19)$$

Er f kontinuert for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

Solution:

Opstil y som graf af x , så $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$. Så fås

$$\begin{aligned} f(x, ax) &= \frac{x^2 ax}{x^4 + a^2 x^2} \\ &= \frac{ax}{x^2 + a^2} \\ &= \frac{ax}{x^2 + a^2} \rightarrow \frac{0}{0 + a^2} = 0, x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Hvis $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x, ax^2) &= \frac{x^2 ax^2}{x^4 + a^2 x^4} \\ &= \frac{a}{1 + a^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Så funktionen er ikke kontinuert $(x, y) = (0, 0)$

Kontinuitet af vektorfunktioner

Definition (3.2.1)

En funktion $f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom}(f) \in \mathbb{R}$ er kontinuert i $x_0 \in A = \text{dom}(f)$ hvis

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\| \rightarrow 0 \text{ for } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \rightarrow 0 \quad (22)$$

Ortogonale vektor

Example (2.1.1)

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (23)$$

$\vec{x} \neq \vec{0}$ og $\vec{y} \neq \vec{0}$ er ortogonale hvis prik-produkt (indre produkt) er nul:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad (24)$$

Definition (2.1.2 og eq 2.6)

Lad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. For $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ er det sædvanlige indre produkt givet ved:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \end{aligned} \quad (25)$$

Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ &= \vec{y}^T \vec{x} \\ &= [y_1 y_2 \dots y_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Example

I $\mathbb{R}^4$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$. Hvilken værdi af $a \in \mathbb{R}$ er disse ortogonale?

Solution:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot a \\ &= -8 + a \Leftrightarrow a = 8 \end{aligned} \quad (27)$$

Norm/længde af vektor

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k \overline{x_k}} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \end{aligned} \quad (28)$$

Enhedsvektor hvis $\|\vec{x}\| = 1$

Kvadratiske former

Definition (1.2.1)

$$q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R} \quad (29)$$

Example

$n = 2$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c = 0, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$q(\vec{x}) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0$$

$$= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} -x_1 + 0 \\ 0 - 2x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$= -x_1^2 - 2x_2^2$$

Delvis afledte

Example

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1^2}{2} - x_1 x_2^2 \quad (32)$$

Laver ny funktion med kun én variabel:

$$h(x_1) = 1 - \frac{x_1^2}{2} - x_1 \cdot c_1, c_1 = x_2^2 \quad (33)$$

$$h'(x_1) = 0 - \frac{2}{2}x_1 - c_1 = -x_1 - x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = -x_1 - x_2^2 \quad (34)$$

For x_2 :

$$\begin{aligned}g(x_2) &= 1 - c_2 - c_3 x_2^2 \\ \text{hvor } c_2 &= \frac{x_1^2}{2}, c_3 = x_1 \\ g'(x_2) &= 0 - 0 - 2c_3 x_2\end{aligned}\tag{35}$$

Så:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) = -2x_1 x_2\tag{36}$$

Definition (3.2.2 (gradientvektoren))

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix}\tag{37}$$

Den hører altid til i domænet af f .

Gradientvektoren fra før:

$$\vec{\nabla} q(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -4x_2 \end{bmatrix}\tag{38}$$