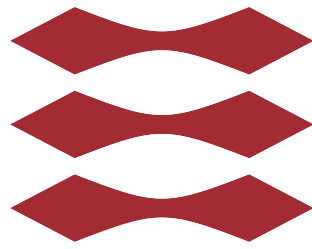


DTU



Funktioner 1 - Opgaver

01002

Matematik 1b

Date: 03 February 2026

Semester: Spring 2026

Rasmus Rosendahl-Kaa

Exercises

1: Funktion eller ej?

Betragt følger korrespondance mellem a og b værdier:

a	b
1	0
2	1
0	3
1	2

Vi betragter funktioner hvis definitions­mængde (domain) er en delmængde af $\{0, 1, 2, 3\}$ og hvis dispositions­mængde (co-domain) er $\{0, 1, 2, 3\}$.

Vi skal bestemme om f og g definerer funktioner, hvis vi lader f følge reglen at første søjle (a -værdierne) er input og anden søjle (b -værdierne) skal være output af funktionen f og definitions­mængden er $\{0, 1, 2\}$; og vi lader g følge reglen om at anden søjle er input og første søjle skal være output af funktionen g med definitions­mængde $\{0, 1, 2, 3\}$.

Definerer f en funktion? Gør g ? I bekræftende fald: bestem værdimængden/billedmængden (engelsk: range/image) for funktionen, og afgør om funktionen er injektiv og surjektiv.

Solution:

f er ikke en funktion, fordi $a = 1$ giver to forskellige værdier.

g er en funktion. Værdimængden må være a 's værdier, så $\{0, 1, 2\}$. G er ikke surjektiv da 3 i dispositions­mængden ikke rammes. Den er heller ikke injektiv, da 1 rammes 2 gange i dispositions­mængden.

2: Ens funktionsforskrifter?

Vi betragter funktioner $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |x| \\ f_2(x) &= \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} \\ f_3(x) &= \max(x, 0) \\ f_4(x) &= \text{ReLU}(x) + \text{ReLU}(-x) \end{aligned} \tag{1}$$

hvor $x \in \mathbb{R}$.

Nogle af funktionerne er samme funktion. Find dem alle!

Solution:

$f_1(x)$, $f_2(x)$ og $f_3(x)$ er ens

3: Funktion med ukendt forskrift

Betragt en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hvorom der gælder $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ og $f(2) = 3$. Hvad kan vi sige om f i punktet $x = 2$? Vælg det korrekte svar:

1. Funktionen er kontinuert i punktet $x = 2$.
2. Funktionen er differentiabel i punktet $x = 2$.
3. Funktionen er diskontinuert i punktet $x = 2$.
4. Funktionen er ikke veldefineret i punktet $x = 2$.
5. Man kan ikke afgøre ovenstående, da funktionsforskriften ikke er angivet!

Solution:

Funktionen er diskontinuert i punktet $x = 2$.

4: Ikke-linearitet af ReLU

Betragt ReLU-funktionen, $\text{ReLU} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Forklar hvorfor funktionen ikke er lineær.

Solution:

Funktionen er ikke lineær da når $x < 0$ kan man ikke differentiere den.

5: Mulige visualiseringer

Diskuter om man kan visualisere nedenstående funktioner – i givet fald plot dem med SymPy/ dtumathtools:

1. En skalarfunktion af to variable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$
2. En skalarfunktion af fire variable $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{|x_1 x_2 x_3 x_4|}$
3. En kompleks skalarfunktion af to variable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|} + i \cos(x_1 + x_2)$
4. Et vektorfelt i 2D $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{3}, \frac{x_1}{3}\right)$
5. Et vektorfelt i 3D $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3 + yz^2, y^3 - xz^2, z^3)$
6. En funktion af formen $\mathbf{r} : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

Note (Python kommandoer)

Følgende kan være nyttige: `dtuplot.plot3d`, `dtuplot.plot_vector`, `dtuplot.plot3d_parametric_line`.

Solution:

6: Evaluering af et Neurtalt Netværk

Betragt et simpelt "shallow" neuralt netværk $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ med ét skjult lag ($L = 2$). Netværket er defineret ved parametrene:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = [-1 \ 2], \quad b_2 = 0 \quad (2)$$

hvor aktiveringsfunktionen i det **skjulte lag** er ReLU-funktionen, $\sigma(z) = \text{ReLU}(z)$, men aktiveringsfunktionen i det **sidste lag** er identitetsafbildningen $\sigma(z) = z$. Netværksfunktionen er altså givet ved:

$$\Phi(x) = A_2 \text{ReLU}(A_1 x + b_1) + b_2 \quad (3)$$

Spørgsmål a

Beregn værdien af netværket i punktet $x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solution:

$$\begin{aligned} [-1 \ 2] \cdot \text{ReLU}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \\ [-1 \ 2] \cdot \text{ReLU}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \\ [-1 \ 2] \cdot \text{ReLU}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right) &= \\ [-1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} &= -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0.5 = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

Spørgsmål b

Find et punkt x , hvor netværkets output $\Phi(x)$ er negativt. Begrund dit svar.

Solution:

Punkt $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ giver:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{ReLU}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [-1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -1 \end{aligned} \quad (5)$$

Spørgsmål c

Hvor mange justerbare parametre (vægte og bias-værdier) har dette netværk totalt?

Solution:

Tæller antal værdier i dens parametre: 9

Spørgsmål d

Vi erstatter nu aktiveringsfunktionen (ReLU) med en "hard limiter" funktion (en variant af signum-funktionen), som vi kalder σ_{step} .

Som **skalar**-funktion $\sigma_{\text{step}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er den defineret ved:

$$\sigma_{\text{step}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \geq 0 \\ -1 & \text{hvis } x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Som **vektorfunktion** $\sigma_{\text{step}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ defineres den ved at anvende skalarfunktionen på hver koordinat:

$$\sigma_{\text{step}}(z) = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{step}}(z_1) \\ \vdots \\ \sigma_{\text{step}}(z_n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Betragt nu netværket med denne nye aktiveringsfunktion: $\Phi(x) = A_2 \sigma_{\text{step}}(A_1 x + b_1) + b_2$.

Angiv den delmængde af definitionsmængden, hvor netværksfunktionen $\Phi(x)$ er **diskontinueret**.

Solution:

7: Visualisering af Netværket

I denne opgave skal du bruge Python til at visualisere funktionen $\Phi(x)$ fra forrige opgave (med ReLU som aktiveringsfunktion).

Du skal plotte grafen for netværket over området $x_1, x_2 \in [-2, 2]$.

Note

Læg mærke til, at grafen består af plane flader, der er "knækket" og sat sammen. Dette skyldes ReLU-funktionen, som er stykkevis lineær. I store netværk der anvendes i praksis sættes millioner af sådanne lineære underrum sammen.

Kan du plotte grafen af det samme neurale netværk hvor σ_{step} bruges i stedet for ReLU? Planerne i den nye graf bør ikke "hænge sammen" (hvorfor?).

Solution:

8: Lineær vektorfunktion

Lad $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Betragt vektorfunktionen $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $f = x \mapsto Ax$, hvor x er en søjlevektor i $\mathbb{R}^5$.

Spørgsmål a

Angiv de 3 koordinatfunktioner for f .

Solution:

Spørgsmål b

Angiv billedmængden $\text{im}(f)$ for f .

Solution:

Spørgsmål c

Er vektorfunktionen f surjektiv og/eller injektiv?

Solution:

9: Næste primtal-funktion (frivillig)**Note**

Dette er en valgfri ekstraopgave.

Lad $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være en funktion, der returnerer det næste primtal (strengt) større end et givet naturligt tal n . I denne opgave skal du først vurdere værdien af funktionen for to specifikke input og derefter vise, at funktionen er veldefineret, før du implementerer den i Python.

Spørgsmål a

Find ved simple overvejelser $f(10)$ og $f(13)$.

Solution:

Spørgsmål b

Argumenter for, at funktionen $f(n)$ er veldefineret.

Solution:

Spørgsmål c

Kan man finde et funktionsudtryk for $f(n)$? Argumenter for, hvorfor det er eller ikke er muligt.

Solution:

Spørgsmål d

Implementer funktionen $f(n)$ i Python, som tager et heltal n som input og returnerer det næste primtal større end n . Definer en hjælpefunktion `er_primal(x)` til at afgøre, om et tal er primtal.

Solution:

Spørgsmål e

Kan du opdatere din Python-funktion fra forrige opgave, så f 's definitionsområde udvides fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{R}$?

Solution:

Opgaver – Lille Dag

1: Størrelse af vektorer

Betragt følgende tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -8 \\ -12 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Hvilken vektor er længst? Hvilke vektorer er ortogonale på hinanden? Hvilke to vektorer er tættest på hinanden?

Note

Vi kan forestille os vektorerne som (geometriske) stedvektorer med begyndelsespunkt i $\mathbf{0} = [0, 0, 0]^T$ og slutpunkt $\mathbf{v}_i$ for hhv $i = 1, 2, 3$. Under tiden skriver man dette som $\overrightarrow{\mathbf{0}\mathbf{v}_i}$.

Solution:

Længder:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1\| &= \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2 + (-10)^2} = 17.320508075688775 \\ \|\vec{v}_2\| &= \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2 + 14^2} = 17.663521732655695 \\ \|\vec{v}_3\| &= \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2 + (-12)^2} = 17.549928774784245 \end{aligned} \quad (10)$$

$\mathbf{v}_2$ er længst

Ortogonale ($\mathbf{v}_x \cdot \mathbf{v}_y = 0$):

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle &= (-10) \cdot (-10) + (-10) \cdot (-4) + (-10) \cdot 14 \\ &= 100 + 40 - 140 = 0 \\ \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle &= (-10) \cdot (-10) + (-10) \cdot (-8) + (-10) \cdot (-12) \\ &= 100 + 80 + 120 = 300 \\ \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle &= (-10) \cdot (-10) + (-4) \cdot (-8) + 14 \cdot (-12) \\ &= 100 + 32 - 168 = -36 \end{aligned} \quad (11)$$

$\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er ortogonale.

$\vec{v}_1$) og $\vec{v}_3$) må være tættest på hinanden, da $\vec{v}_2$ har et positivt koordinat, mens de andre kun har negative.

2: Partielle afledede af simpel skalar-funktion

Find de partielle afledte $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ og $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ for $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_2^3$. Bestem værdien af de partielle afledte i punktet $(x_1, x_2) = (1, 2)$.

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}:$$

$$\begin{aligned}
 h(x_1) &= x_1^3 + 3x_1c_1 + c_2, c_1 = x_2, c_2 = x_2^3 \\
 h'(x) &= 3x_1^2 + 3c_1 + 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 3x_1^2 + 3x_2
 \end{aligned} \tag{12}$$

I punkt $(x_1, x_2) = (1, 2)$: $3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2 = 9$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}$:

$$\begin{aligned}
 g(x_2) &= c_3 + 3 \cdot c_4 \cdot x_2 + x_2^3, \quad c_3 = x_1^3, c_4 = x_1 \\
 g'(x_2) &= 0 + 3 \cdot c_4 + 3x_2^2 \\
 \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 3x_1 + 3x_2^2
 \end{aligned} \tag{13}$$

I punkt $(x_1, x_2) = (1, 2)$: $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 = 15$

3: Forskellige(?) kvadratiske former

Lad $x = [x_1, x_2]^T$ være en søjlevektor i $\mathbb{R}^2$. Definér:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ -24 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \frac{73}{5} & -\frac{36}{5} \\ -\frac{36}{5} & \frac{52}{5} \end{bmatrix} \tag{14}$$

og

$$b_1 = \begin{bmatrix} -20 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad b_2 = b_1, \quad b_3 = \begin{bmatrix} -44 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad c = -60 \tag{15}$$

Lad $q_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved:

$$q_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c \tag{16}$$

for $i = 1, 2, 3$. Sådanne funktioner kaldes kvadratiske former.

Spørgsmål a

Gang udtrykket for $q_1(x_1, x_2)$ ud. Først i hånden, så ved hjælp af Python. Gang også udtrykkene for $q_2(x_1, x_2)$ og $q_3(x_1, x_2)$ (i hånden eller Python) ud.

Solution:

$$\begin{aligned}
 q_1(x_1, x_2) &= [x_1 \ x_2] \cdot \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [-20 \ 40] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 60 \\
 &= [x_1 \ x_2] \cdot \begin{bmatrix} 11x_1 - 12x_2 \\ 4x_2 - 12x_1 \end{bmatrix} - 20x_1 + 40x_2 - 60 \\
 &= 11x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 - 20x_1 + 40x_2 - 60 \\
 &= 11x_1^2 + 4x_2^2 - 24x_1x_2 - 20x_1 + 40x_2 - 60
 \end{aligned} \tag{17}$$

Se Python fil for de andre q

Spørgsmål b

Er den kvadratiske matrix A i en kvadratisk form (som fx $x^T A x$) entydig givet?

Solution:

Nej da $q_1(\vec{x})$ og $q_2(\vec{x})$ er ens men har forskellige A . Så forskellige A kan godt give samme $q(\vec{x})$

Spørgsmål c

Plot grafen af funktionen q_1 . Plot så nogle niveaukurver. Hvilken geometrisk form har niveaukurverne? Gør det samme for q_3 .

Solution:**Spørgsmål d**

En af funktionerne har et minimum. Hvilken? Hvor ligger det cirka? Hvad kaldes det samme punkt for de funktioner der ikke har et minimum?

Solution:**4: Softmax-funktionen**

I denne opgave ser vi på **softmax**-funktionen.

Spørgsmål a

Beregn **softmax** af følgende tre vektorer i $\mathbb{R}^3$. Du kan gøre det ved håndkraft (brug lommeregner til eksponentialfunktionen) eller ved hjælp af Python. Angiv svarene med ca. 3 decimaler.

1. $x_1 = [1, 2, -5]^T$
2. $x_2 = [10, 2, -5]^T$
3. $x_3 = [100, 2, -5]^T$

Solution:**Spørgsmål b**

Hvad observerer du, når forskellen mellem den største værdi i inputtet og de andre værdier øges (som i skiftet fra x_1 til x_2 og x_3)? Hvorfor kaldes funktionen mon "soft"-max?

Solution:**Spørgsmål c**

Er **softmax**-funktionen kontinuert?

Solution:**Spørgsmål d**

Betrakt **softmax** som en afbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$. Er funktionen **injektiv** (en-til-en)?

Er funktionen **surjektiv** (på) i forhold til dispositions-mængde $\mathbb{R}^n$?

Solution:

5: Kvadratiske former med symmetriske matricer

Lad A være en vilkårlig $n \times n$ matrix, og lad x være en søjlevektor i $\mathbb{R}^n$. Definer B ved $B = \frac{A+A^T}{2}$.

Spørgsmål a

Vis at matricen B er symmetrisk.

Solution:

Spørgsmål b

Vis at $x^T Ax = x^T Bx$.

Solution:

Spørgsmål c

Konkluder at man altid kan antage at kvadratiske former af formen $q(x) = x^T Ax + b^T x + c$ er givet ved en **symmetrisk** matrix A .

Solution: