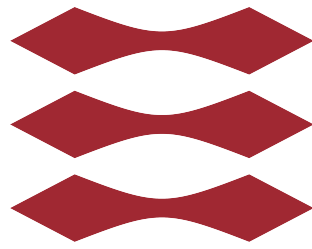


DTU



Kinematics 2D

10060

Physics

Date: 09 February 2026

Semester: Spring 2026

Rasmus Rosendahl-Kaa

Hastighedsvektor i flere dimensioner

Laver en positionsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

For at finde ændring i position:

$$\Delta r = r_2 - r_1 \quad (2)$$

Gennemsnitlig hastighedsvektor:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \quad (3)$$

Instantan hastighedsvektor

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Fart:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (5)$$

Komponenter af hastighedsvektor

Hvis du har vinkel for hastighedsvektor og hastighedsvektoren, så kan du få $v_x(t)$, $v_y(t)$:

$$\begin{aligned} v_x &= v(t) \cdot \cos(\alpha) \\ v_y &= v(t) \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (6)$$

Fart:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (7)$$

Finde vinkel/retning:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{v_y}{v_x} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Accelerationsvektor

Er en ændring i hastighedsvektor

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (9)$$

Gennemsnitlig acceleration

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (10)$$

Instantan accelerationsvektor

Når $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

Parallel og vinkelret komponent af accelerationsvektor

Kan finde komponenterne af accelerationsvektor

Tangentiel $a_{\parallel}$: ændring i $|\vec{v}|$

Radiel $a_{\perp}$: ændring af $\vec{v}$

Projektilbevægelse

Sker kun i to retninger: x og y.

Er nogle forudsætninger:

- 1) Kun tyngdekraft. Dvs. ingen luftmodstand
- 2) Punktformet partikel

Vil finde $(x(t), y(t))$

Note (Fra forelæsning 1)

Formler for bevægelse med konstant acceleration i én dimension:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Acceleration: (er konstant i tid):

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned} \quad (13)$$

Hastighed:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = |\vec{v}_0| \cdot \cos(\alpha_0) \\ v_y &= v_{0y} - g \cdot t = |\vec{v}_0| \cdot \sin(\alpha_0) - g \cdot t \end{aligned} \quad (14)$$

Position:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x} \cdot t \quad (\text{er lineær i tid}) \\ y(t) &= y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{er kvadratisk i tid}) \end{aligned} \quad (15)$$

Banekurve

Vil gerne finde $y(x)$ (y, som er afhængig af x).

Antager: $x_0 = y_0 = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\alpha_0) \cdot t \\ y(t) &= v_0 \sin(\alpha_0) \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Isolér t i $x(t)$ og sæt ind i $y(t)$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)} \\ y(t) &= \frac{v_0 \sin(\alpha_0) \cdot x}{v_0 \cos(\alpha_0)} - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)} \right)^2 \\ &= \tan(\alpha_0) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha_0)} \cdot x^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Der **skal** startes i 0 før ligningen gælder, men der behøves ikke at ende i 0.

Example

2 lande er i krig: Det ene land beskyder det andet land med et missil. Missilet skal rejse $L = 30$ km for at ramme målet og holde sig under $h = 1$ km højde for ikke at blive skudt ned.

- Hvad er hastigheden på missilet? Og hvad er affyringsvinklen?
- Hvor lang tid er missilet undervejs?

Solution:

Højeste punkt:

$$h = y = \frac{(v_0 \cdot \sin(\theta))^2}{2g} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{h \cdot 2g}{\sin^2(\theta)}} \quad (18)$$

Længde:

$$L = x = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g} = \frac{h2g \sin(2\theta)}{g \sin^2(\theta)} = \frac{2 \cdot 2h \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2h}{L} \Leftrightarrow \tan(\theta) = \frac{2 \cdot 2h}{L} \quad (19)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2 \cdot 2h}{L}\right) = \arctan\left(\frac{4 \cdot 1000m}{30 \cdot 1000m}\right) = 0.13 \text{ rad} \approx 7.59^\circ$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{h \cdot 2g}{\sin^2(\theta)}} = \sqrt{\frac{1000m \cdot 2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}}{\sin^2(0.13 \text{ rad})}} = 1059 \frac{m}{s} \approx 3813 \frac{km}{t} \quad (20)$$

$$T_{\text{tot}} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin(\theta)}{g} = \frac{2 \cdot 1059 \frac{m}{s} \cdot \sin(0.13 \text{ rad})}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 28s \quad (21)$$

Example

2 lande er i krig: Det ene land beskyder det andet land fra et bjerg på 500 m med et missil. Missilet skal rejse $L=30$ km for at ramme målet og holde sig under $h=1$ km højde for ikke at blive skudt ned.

- Hvad er hastigheden på missile ? Og hvad er affyrings vinklen?
- Hvor lang tid er missile undervejs?

Solution:

Opskriv ligninger

$$x(t) = v_{0x} \cdot t \\ y(t) = (v_{0y}) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 + 500m \\ v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \quad (22)$$

Lad T være tidspunktet for impakt:

$$x(t = T) = L = v_{0x} \cdot T \\ y(t = T) = 0 = v_{0y} \cdot T - \frac{1}{2}gT^2 \quad (23)$$

Lad t^* være når missilet når toppunktet:

$$\begin{aligned} v_x(t^*) &= v_{0x} \\ v_y(t^*) &= 0 = v_{0y} \cdot t^* \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{v_0 \cos(\theta)} \Leftrightarrow \tan(\theta) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \quad (25)$$

Har 5 ligninger med 5 ubekendte. Brug Python/Maple til at udregne og finde de ubekendte.

Cirkulær bevægelse med konstant fart

Dvs. $|\vec{v}|$ er konstant. Accelerationen vender indad mod orego.

$$|\vec{a}_{\text{rad}}| = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \frac{\text{omkreds}}{\text{omløbstid}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot r} = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} \quad (26)$$

Cirkulær bevægelse med ikke-konstant fart

$$\begin{aligned} a_{\text{rad}} &= \frac{v^2}{r} \\ a_{\text{tan}} &= \frac{d \cdot |v|}{dt} \end{aligned} \quad (27)$$

Obs $\frac{d|v|}{dt} \neq \left|\frac{dv}{dt}\right|$. Det er forskellen i fart, ikke forskellen i hastighed.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a}_{\text{total}} \\ \left|\frac{dv}{dt}\right| &= |a_{\text{total}}| \end{aligned} \quad (28)$$

Example

En centrifuge har en konstant tangential acceleration på $a_t = 8 \frac{m}{s^2}$ i 15 s hvorefter den opnår centrifuge hastigheden.

- a) Hvad er denne hastighed?
b) Hvor mange omdrejninger per minut (rpm) har centrifugen efter accelerationen?

Solution:

a)

$$\frac{d|v|}{dt} = a_t$$

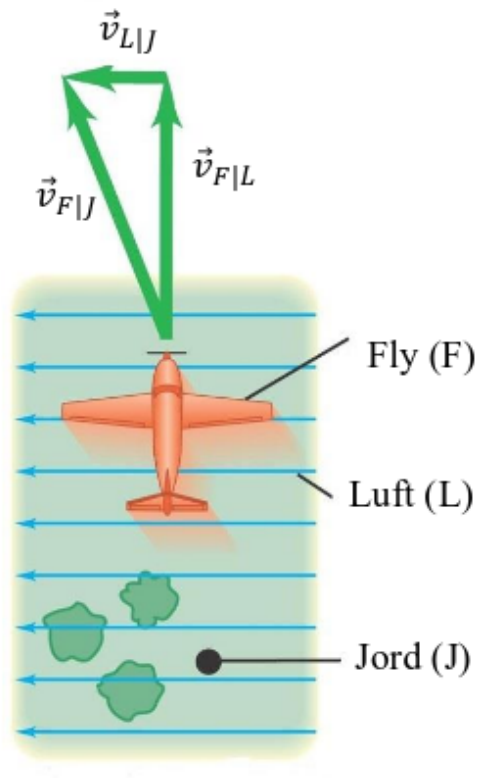
$$\begin{aligned} v(t) &= \int a_t dt = \int_0^{15s} a_t dt = [a_t \cdot t]_0^{15s} \\ &= 8 \frac{m}{s^2} \cdot 15s = 120 \frac{m}{s} \end{aligned} \quad (29)$$

b)

Find omkreds:

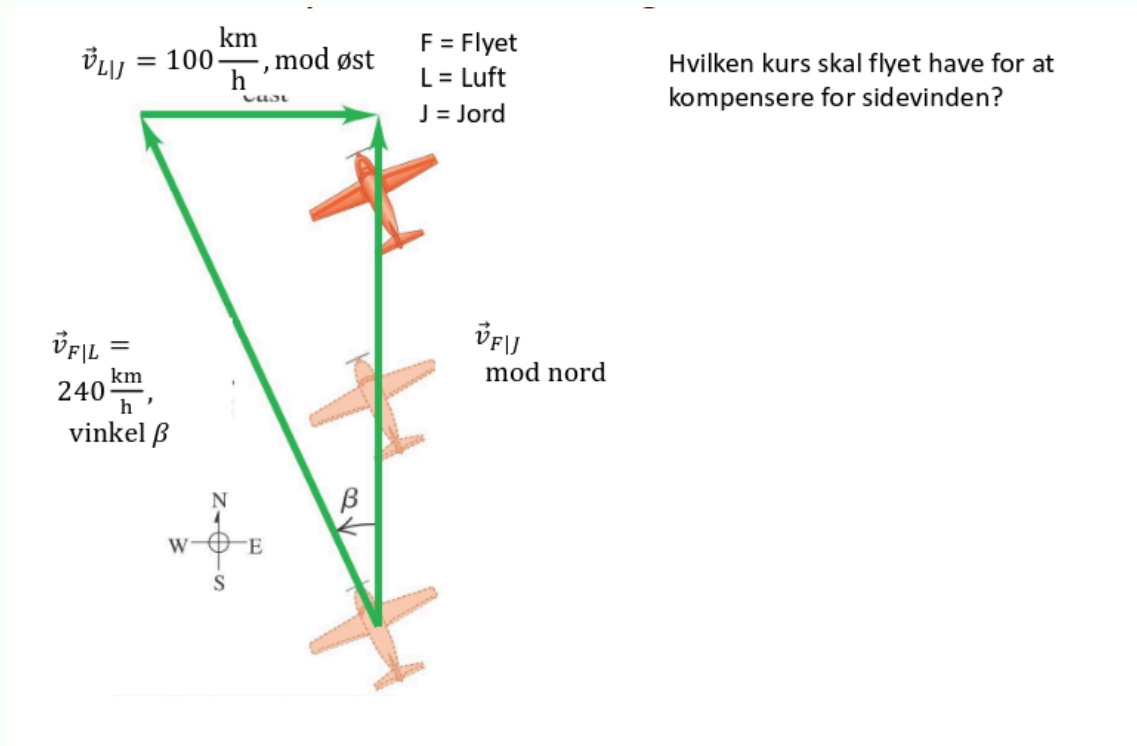
$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 0.3m = 1.8m \\ \text{rpm} &= \frac{120 \frac{m}{s}}{1.8m} = 56.5 \text{ rps} \cdot 60 = 3400 \text{ rpm} \end{aligned} \quad (30)$$

Relativ hastighed i to dimensioner



$$\vec{v}_{F|J} = \vec{v}_{F|L} + \vec{v}_{L|J} \quad (31)$$

Example



Solution:

$$\sin(\beta) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenusen}} = |v_{L|J}| \quad (32)$$