

Fysik PG 10060

Forårs-forelæsning #2

Kinematik 2D



Forelæser:

Alexander Bagger,
Lektor, DTU Fysik

Kursusoverblik

Overblik over forårets forelæsninger, **foreløbig** plan:

Uge 1: Kinematik 1D (Kap. 3)

Uge 2: Kinematik 2D (Kap. 4)

Uge 3: Usikkerhed (python notes)

Uge 4: Eksperimenter (python notes) + Eksperiment 1

Uge 5: Kræfter 1 (Kap. 5) + Eksperiment 1

Uge 6: Kræfter 2 (Kap. 6)

Uge 7: Bevægelsesligninger (Kap. 15)

Uge 8: Arbejde Og Energi (Kap. 7) + Eksperiment 2

Uge 9: Energibevarelse (Kap. 8) + Eksperiment 2

Uge 10: Stød Og Impulsbevarelse (Kap. 9)

Påske (30/3)

Påske (6/4)

Uge 12: Rotation 1 (Kap. 10)

Uge 13: Rotation 2 (Kap. 11)

Uge 14: Energitema 1

Dagens forelæsning:

Uge 2: Kinematik 2D (Kap. 4)



- Bevægelse i 2 og 3 dimensioner
 - Position
 - Hastighed og fart
 - Acceleration
- Projektilbevægelse (skrå kast)
 - Eksempel 1
 - Eksempel 2
- Cirkel bevægelse
 - Case study
- Relativ bevægelse
 - Eksempel 4

Repetition (Kinematik 1D): Relevante formler

Konstant acceleration

Equation	Contains
$v = v_0 + at$	v, a, t ; no x
$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	x, v, t ; no a
$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	x, a, t ; no v
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	x, v, a ; no t

Frit fald acceleration

$$v = v_0 - gt \text{ (positive upward)}$$

$$y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \text{ (positive upward)}$$

General acceleration

$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow v(t) = \int_0^t a(t)dt + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x(t) = \int_0^t v(t)dt + x_0$$

Relevante formler

- Projektilbevægelse (skrå kast)

Affyring/
Landing
Horizontal

Tid $T_{tof} = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}$

Bane ligning: $y = \tan(\theta) x - \left[\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} \right] x^2$

Højeste punkt: $y = \frac{(v_0 \sin(\theta))^2}{2g}$

Længde: $R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$

Generelt

$x(t) = v_{0x} t$

$y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

$v_x(t) = v_{0x}$

$v_y(t) = v_{0y} - g t$

$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$

$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$

$y(x) = y_0 + \tan(\theta) x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2$



- Cirkel bevægelse

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$a_T = \frac{d|v|}{dt}$$

- Relativ bevægelse

$$v_{PS} = v_{PS'} + v_{S'S}$$

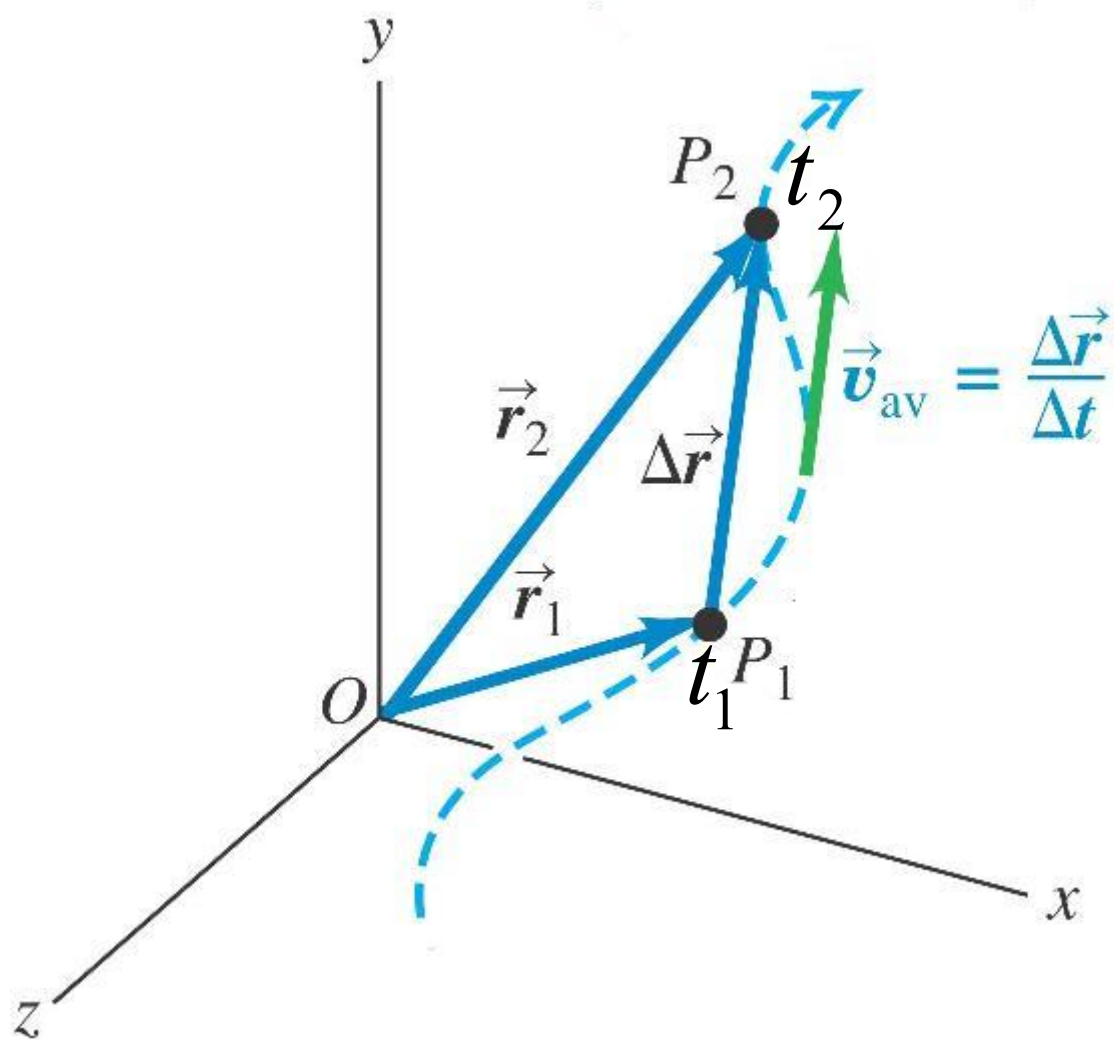
$$a_{PS} = a_{PS'} + a_{S'S}$$

- Trigonometriske formler

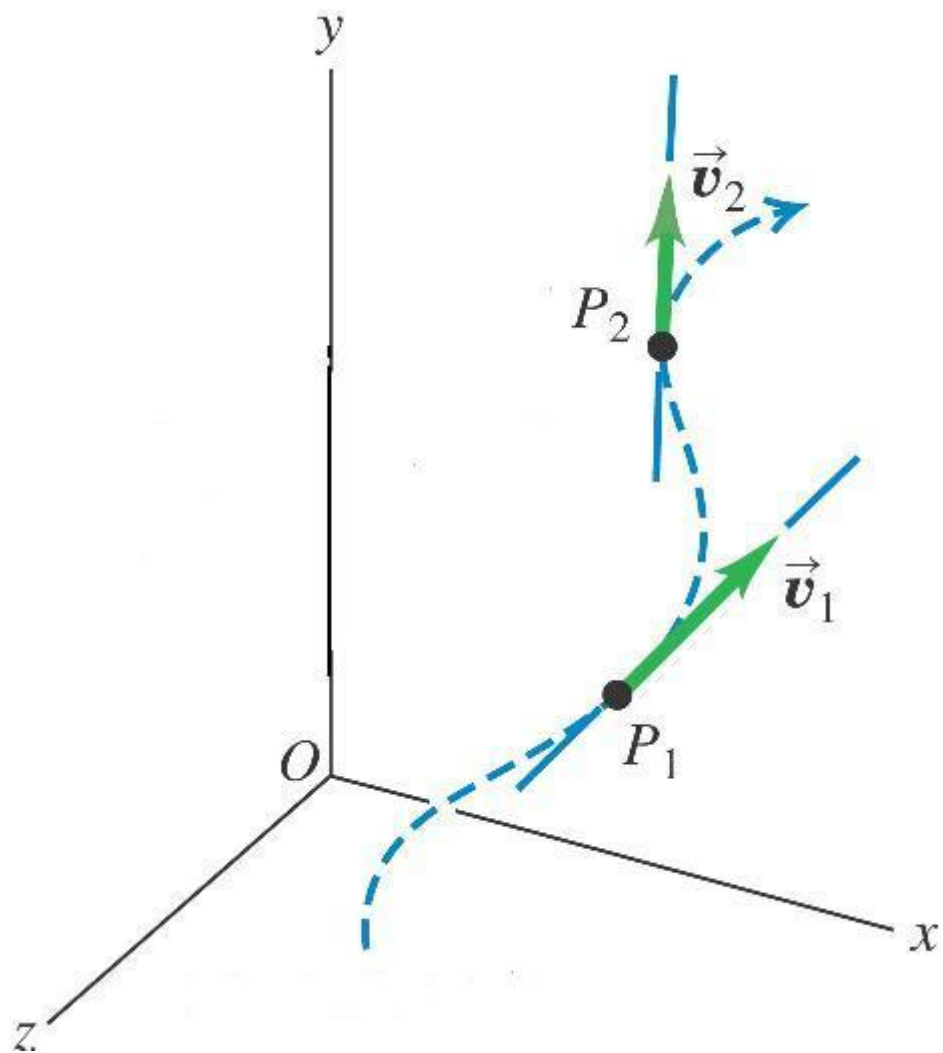
$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

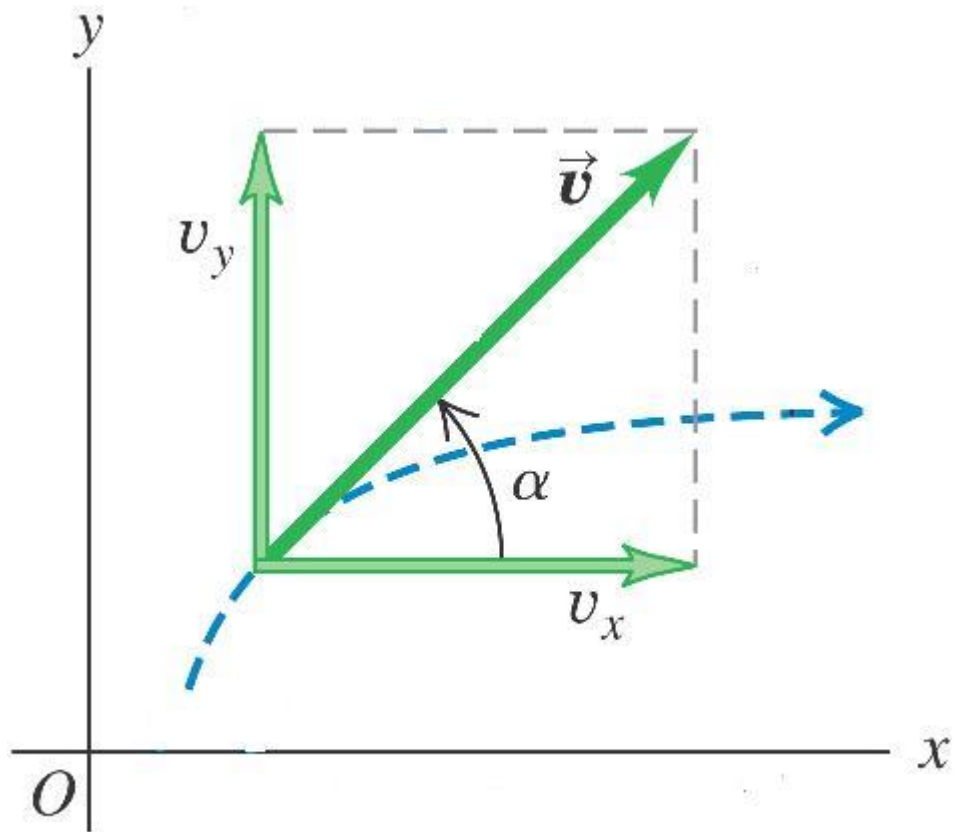
Gennemsnitlig hastighedsvektor



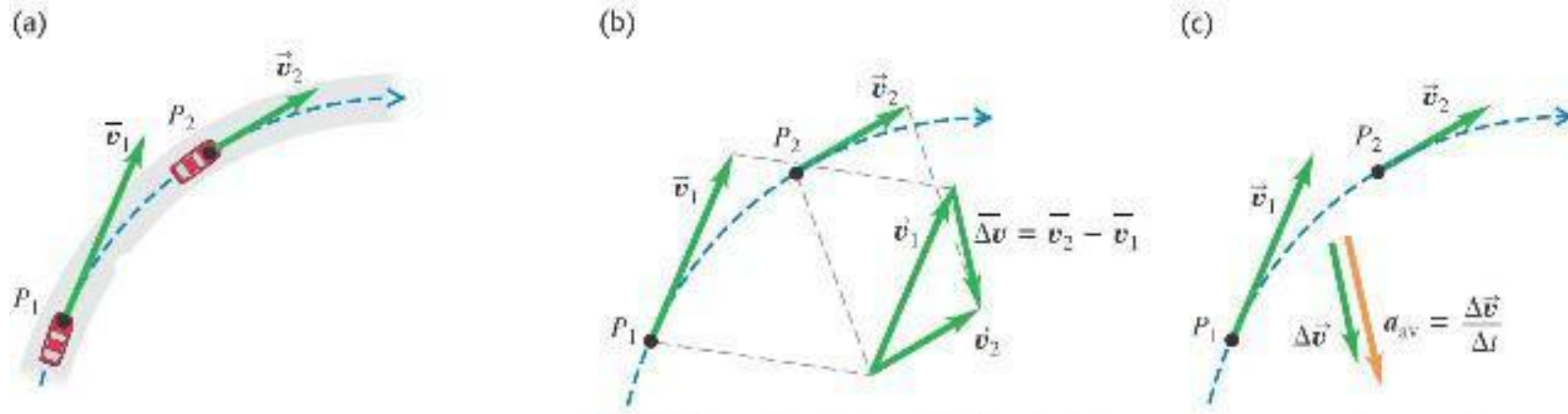
Instantan (øjeblikkelig) hastighedsvektor



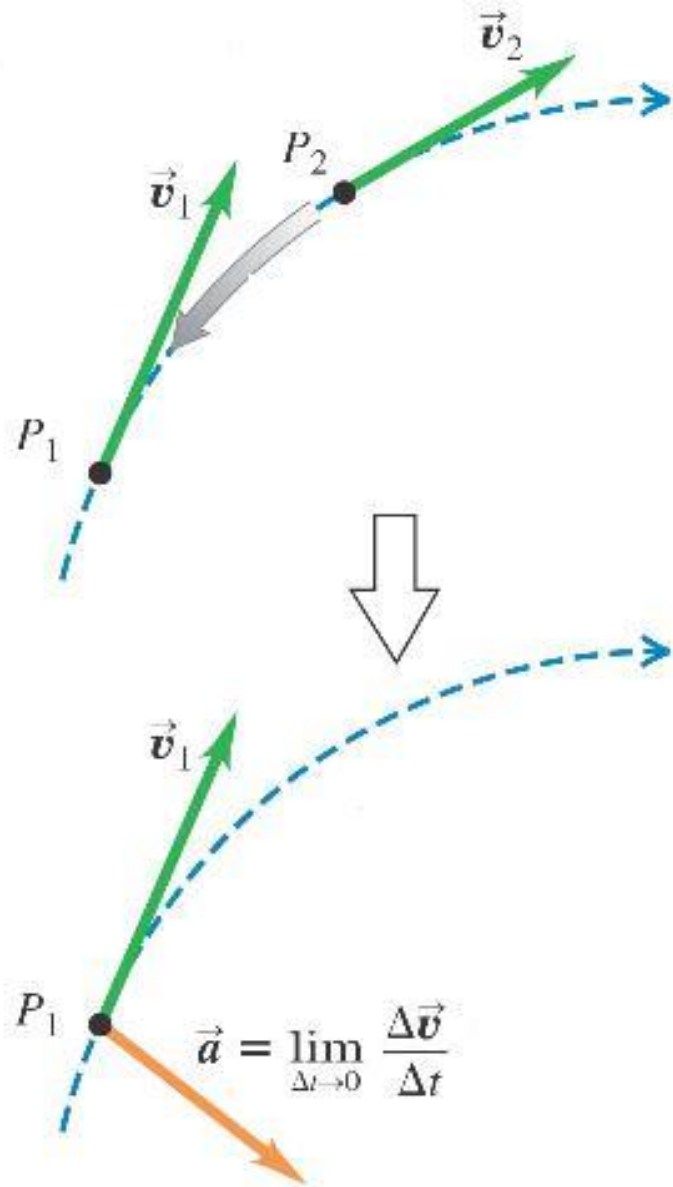
Komponenter af en hastighedsvektor



Accelerationsvektoren

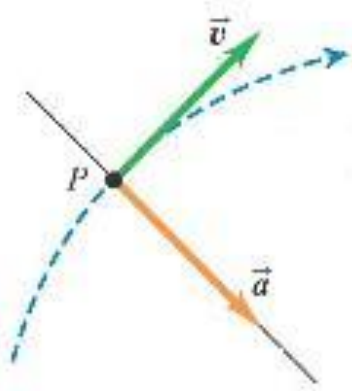


Instantan (øjeblikkelig) accelerationsvektor

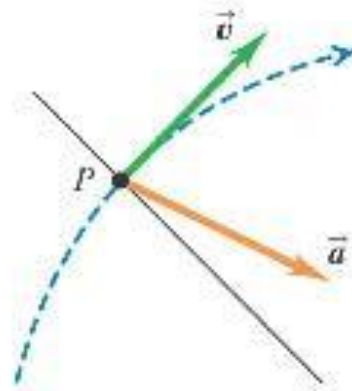


Parallel og vinkelret komponent af accelerationsvektor

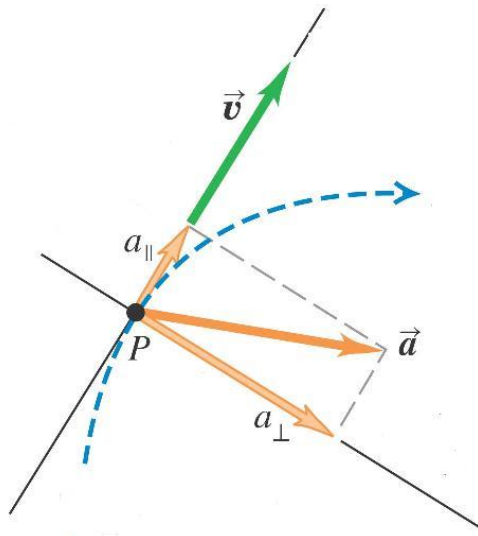
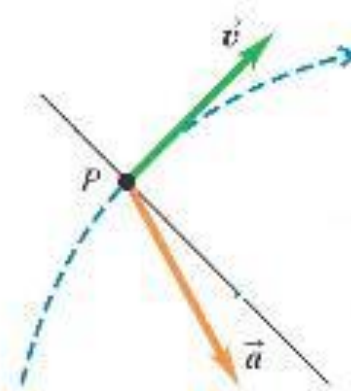
(a)



(b)



(c)



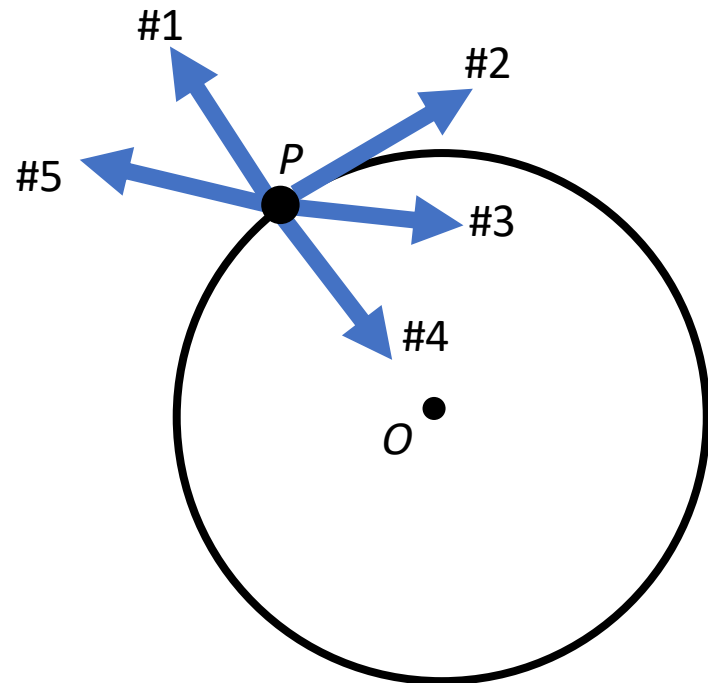


##/##

Join at: **vevox.app**ID: **192-692-974**

Question slide

Et legeme bevæger sig langs en cirkelformet bane med konstant fart (i urets retning). Centrum er i punktet O. Hvilken retning peger legemets acceleration i punktet P?



#1 (væk fra O)

0%

#2 (langs bevægelsesretningen)

0%

#3 (mellem bevægelses retning og O)

0%

#4 (ind mod O)

0%

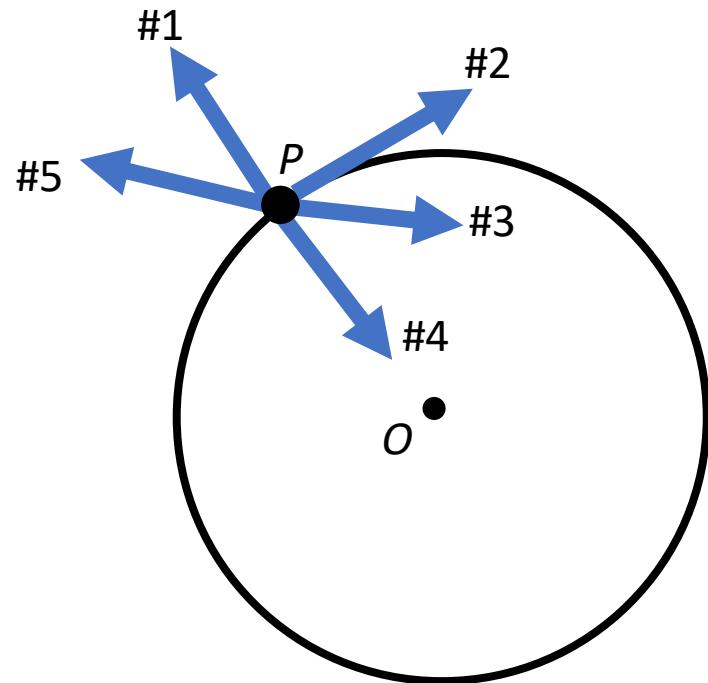
#5 (skråt bagud)

0%





Et legeme bevæger sig langs en cirkelformet bane med konstant fart (i urets retning). Centrum er i punktet O. Hvilken retning peger legemets acceleration i punktet P?



#1 (væk fra O)

0%

#2 (langs bevægelsesretningen)

0%

#3 (mellem bevægelses retning og O)

0%

#4 (ind mod O)

0%

#5 (skråt bagud)

0%



Banekurve, hastighedsvektor, accelerationsvektor

Parameterfremstilling for banekurven.
Positionsvektoren.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

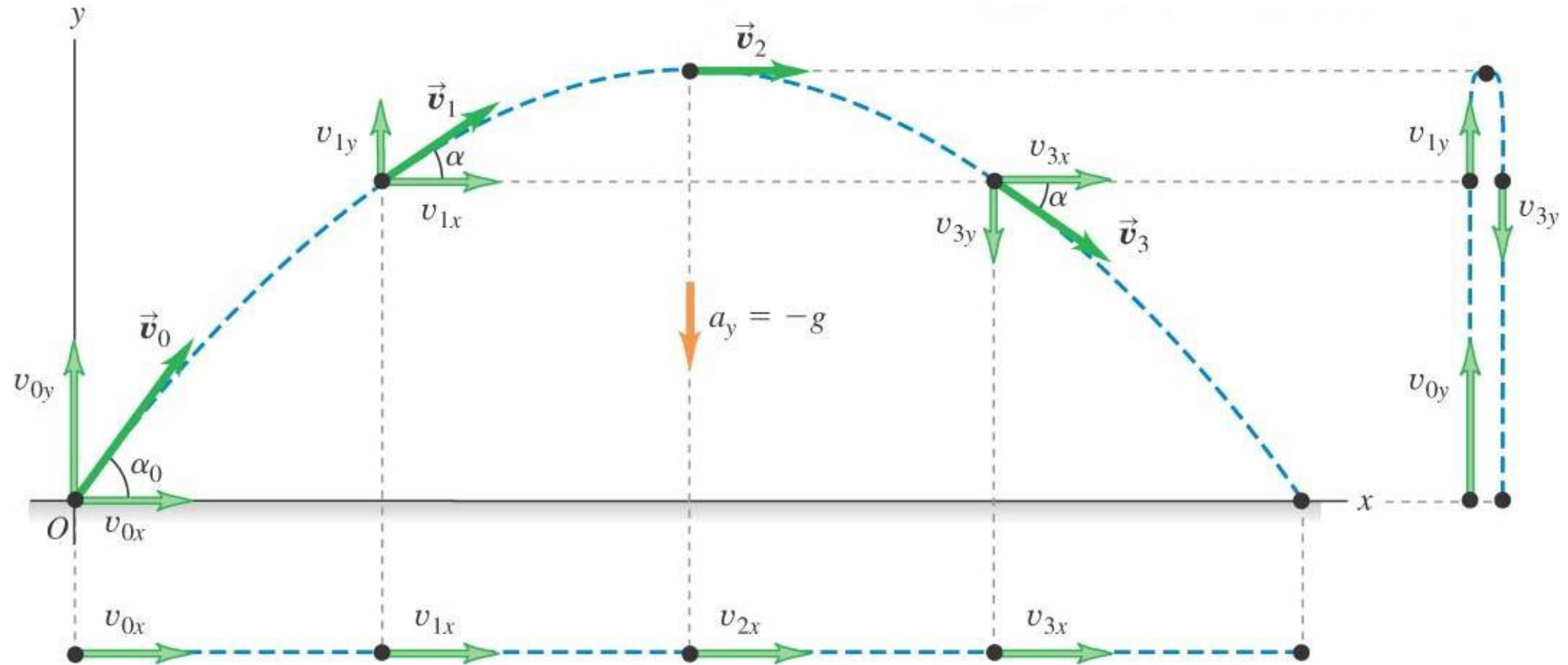
Hastighedsvektoren fås ved komponentvis differentiation. Den er altid tangent til banekurven

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = v(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \quad x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

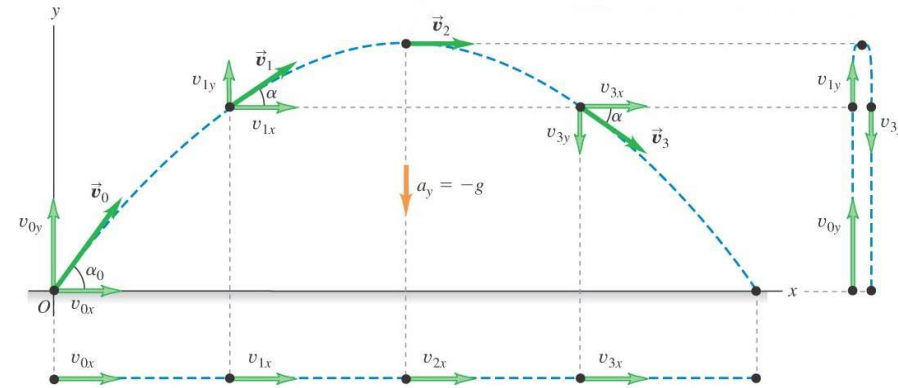
Accelerationsvektoren fås ved komponentvis differentiation af hastighedsvektoren. Det er tit en fordel at opdele accelerationsvektoren i en *radial* og en *tangentiel komponent*.

$$\vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = v'(t) = a(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \quad x''(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Projektilbevægelse



Projektilbevægelse



Fra forelæsning 1:

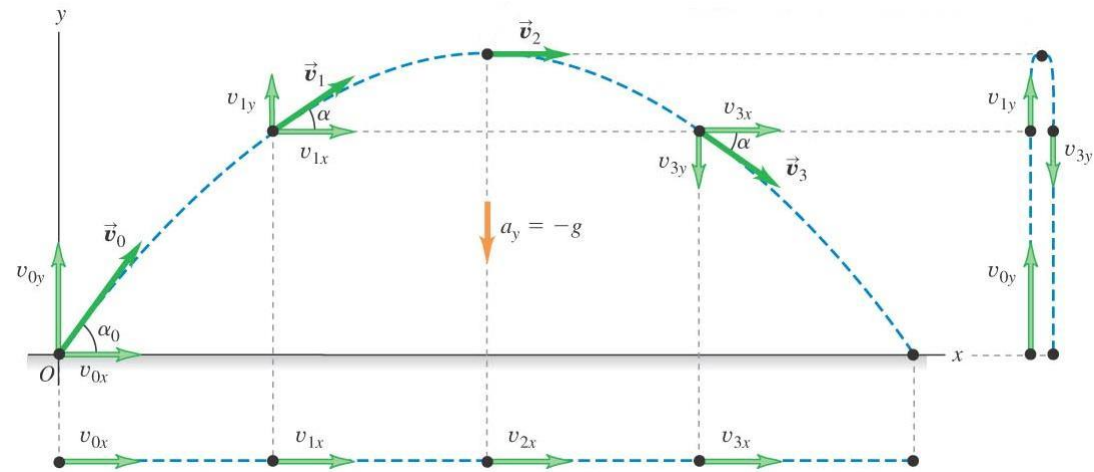
Formler for bevægelse med
konstant acceleration i 1D

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Projektilbevægelse

Banekurve:





Du taber en bold fra hvile og samtidig kaster en anden, identisk bold horisontalt med samme højde som den første bold. Hvilken bold rammer jorden først? Se bort fra luftmodstand.

Bolden der tabes

0%

Bolden der kastes

0%

De rammer jorden på samme tid

0%

Svaret afhænger af hvilken far den anden bold kasted af sted med

0%





##/##

Join at: **vevox.app**ID: **192-692-974**

Results slide

Du taber en bold fra hvile og samtidig kaster en anden, identisk bold horisontalt med samme højde som den første bold. Hvilken bold rammer jorden først? Se bort fra luftmodstand.

Bolden der tabes

0%

Bolden der kastes

0%

De rammer jorden på samme tid

0%

Svaret afhænger af hvilken far den anden bold kasted af sted med

0%



Eksempel 1:

2 lande er i krig: Det ene land beskyder det andet land med et missil. Missilet skal rejse $L=30$ km for at ramme målet og holde sig under $h=1$ km højde for ikke at blive skudt ned.

- a) Hvad er hastigheden på missile ? Og hvad er affyrings vinklen?
- b) Hvor lang tid er missile undervejs?

Eksempel 1:

2 lande er i krig: Det ene land beskyder det andet land med et missil. Missilet skal rejse $L=30$ km for at ramme målet og holde sig under $h=1$ km højde for ikke at blive skudt ned.

- a) Hvad er hastigheden på missile ? Og hvad er affyrings vinklen?
- b) Hvor lang tid er missile undervejs?



##/##

Join at: **vevox.app**ID: **192-692-974**

Question slide

Eksempel 2:

2 lande er i krig: Det ene land beskyder det andet land **fra et bjerg på 500 m** med et missil. Missilet skal rejse $L=30$ km for at ramme målet og holde sig under $h=1$ km højde for ikke at blive skudt ned.

Hvad er hastigheden på missilet ?

1230 m/s

0%

1059 m/s

0%

1420 m/s

0%

1140 m/s

0%



Gemini

Claude



ChatGPT



deepseek



##/##

Join at: **vevox.app**ID: **192-692-974**

Results slide

Eksempel 2:

2 lande er i krig: Det ene land beskyder det andet land **fra et bjerg på 500 m** med et missil. Missilet skal rejse $L=30$ km for at ramme målet og holde sig under $h=1$ km højde for ikke at blive skudt ned.

Hvad er hastigheden på missilet ?

1230 m/s

0%

1059 m/s

0%

1420 m/s

0%

1140 m/s

0%



Gemini

Claude



ChatGPT



deepseek

Hjælpemidler

Alle hjælpemidler - uden adgang til internettet

<https://student.dtu.dk/studieregler/eksamen/brug-af-hjaelpemidler-ved-skriftlig-eksamen>

Alle hjælpemidler tilladt - uden adgang til internettet, dvs. udover skriftlige hjælpemidler er det også tilladt at medbringe bærbar computer, tablet og lignende. Det er ikke tilladt at bruge generativ AI.

Eksempel 2:

2 lande er i krig: Det ene land beskyder det andet land **fra et bjerg på 500 m** med et missil. Missilet skal rejse $L=30$ km for at ramme målet og holde sig under $h=1$ km højde for ikke at blive skudt ned.

- a) Hvad er hastigheden på missile ? Og hvad er affyrings vinklen?
- b) Hvor lang tid er missile undervejs?

Eksempel 2:

2 lande er i krig: Det ene land beskyder det andet land **fra et bjerg på 500 m** med et missil. Missilet skal rejse $L=30$ km for at ramme målet og holde sig under $h=1$ km højde for ikke at blive skudt ned.

- a) Hvad er hastigheden på missile ? Og hvad er affyrings vinklen?
- b) Hvor lang tid er missile undervejs?

```
In [4]: from sympy import symbols,solve,Eq,sin,cos,tan,Rational
g,theta,V0x,V0y,T,t,L = symbols('g,theta,V0x,V0y,T,t,L')
eq1 = Eq(V0x*T,L)
eq2 = Eq(V0y*T-Rational(1,2)*g*T**2+500,0)
eq3= Eq(V0y-g*t,0)
eq4= Eq(V0y*t-Rational(1,2)*g*t**2+500,1000)
eq5= Eq(V0y/V0x,tan(theta))

eq_const1 = Eq(g,9.8)
eq_const2 = Eq(L,30*1000)

print('Equations:')
display(eq1)
display(eq2)
display(eq3)
display(eq4)
display(eq5)
display(eq_const1)
display(eq_const2)
print('Solution:')
sol = solve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq_const1, eq_const2],[g,theta,V0x,V0y,T,t,L],set=True)
display(sol)
```

Equations:

$$TV_0x = L$$

$$-\frac{T^2g}{2} + TV_0y + 500 = 0$$

$$V_0y - gt = 0$$

$$V_0yt - \frac{gt^2}{2} + 500 = 1000$$

$$\frac{V_0y}{V_0x} = \tan(\theta)$$

$$g = 9.8$$

$$L = 30000$$

Solution:

```
([L, T, V0x, V0y, g, t, theta],
{(30000.000000000000,
-24.3872397312364,
-1230.15151901650,
-98.9949493661167,
9.800000000000000,
-10.1015254455221,
0.0803007404166302),
(30000.000000000000,
-4.18418884019218,
-7169.84848098350,
98.9949493661167,
9.800000000000000,
10.1015254455221,
-0.0138062414657192),
(30000.000000000000,
4.18418884019218,
7169.84848098350,
-98.9949493661167,
9.800000000000000,
-10.1015254455221,
-0.0138062414657192),
(30000.000000000000,
24.3872397312364,
1230.15151901650,
98.9949493661167,
9.800000000000000,
10.1015254455221,
0.0803007404166302)})
```

Eksperimenter

DTU

10060 Physics (Polytechnical Foundation), Spring ...

Alexander Bagge

Course Admin

My Course

Activities

Content

Assignments

Discussions

Video & Streaming

Help

+ New Module

Visible

Add Existing

Create New

Search titles, descriptions

Practical Information

Course plan

▶ Spring

▶ Fall

Experiments

▶ Slides

▶ Textbook

▶ University Physics, Vol 1

▶ University Physics, Vol 2

Experiments

Spring 2026		Autumn 2026	
Experiment 1 23 February - 6 March	Experiment 2 16 - 27 March	Experiment 3 21 September - 2 October	Experiment 4 19 - 30 October

Timeslots for experiments

Each experiment runs for two weeks across all modules (if there are enough students signed up). You should only participate in one timeslot, which is 8-12 and 13-17 on all days, and additionally 18-Tuesdays.

DTU

10060 Physics (Polytechnical Foundation), Spring ...

Alexander Bagge
as Student

My Course

Activities

Content

Assignments

Discussions

Video & Streaming

Help

Groups

View Available Groups

My Groups

Groups	Members	Assignment	Discussions	Locker	Email	Action
Experiment 1 Pick date and time Expiry Date:16 February, 2024						
Experiment 1-2026-02-23_8-12	45/80					Leave Group
Experiment 1-2026-02-23_13-17	42/80					Leave Group
Experiment 1-2026-02-24_8-12	30/80					Leave Group
Experiment 1-2026-02-24_13-17	28/80					Leave Group

Break

10 min

9 min

8 min

7 min

6 min

5 min

4 min

3 min

2 min

1 min

Time!



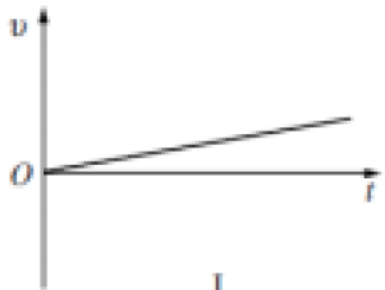
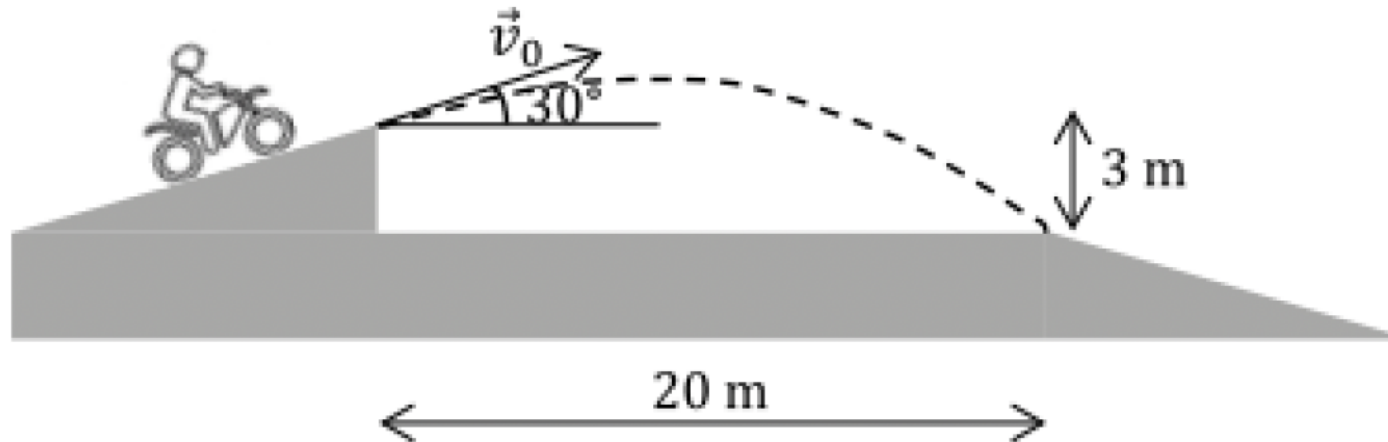
##/##

Join at: **vevox.app**ID: **192-692-974**

Question slide

En stuntman kører en motocykel op ad en rampe, forlader rampen med starthastigheden, v_0 , og lander efterfølgende på en anden rampe.

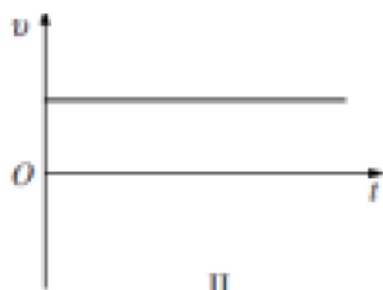
Hvilke grafer viser bedst den **lodrette** hastighedskomponent af motorcyklen som function af tiden?



I

I

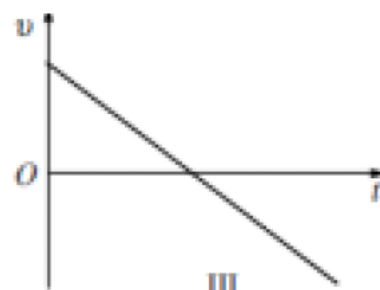
0%



II

II

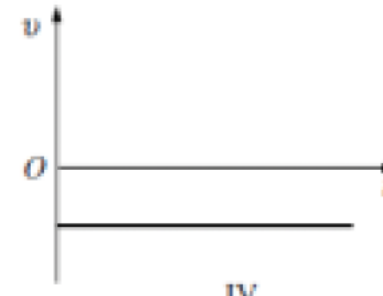
0%



III

III

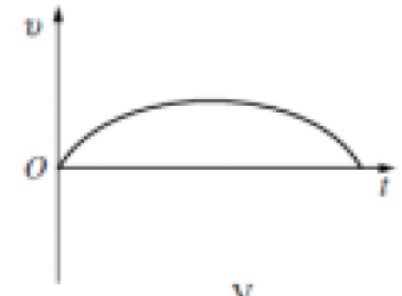
0%



IV

IV

0%



V

V

0%



##/##

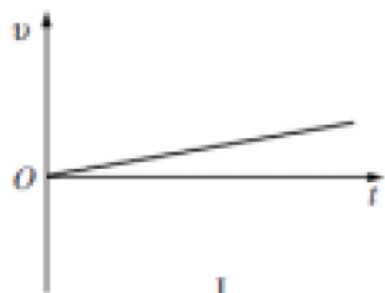
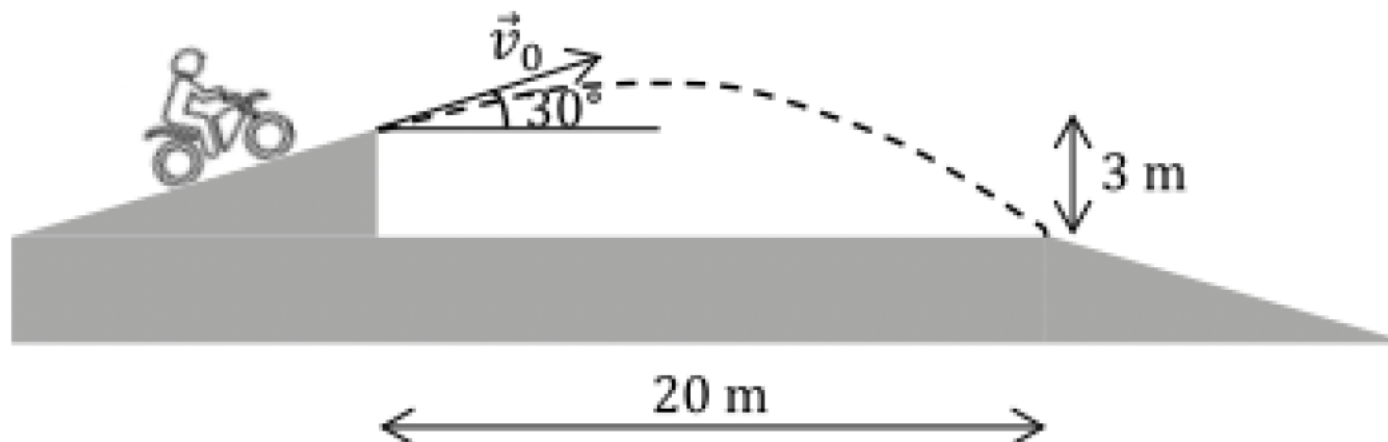
Join at: vevox.app

ID: 192-692-974

Results slide

En stuntman kører en motorcykel op ad en rampe, forlader rampen med starthastigheden, v_0 , og lander efterfølgende på en anden rampe.

Hvilke grafer viser bedst den **lodrette** hastighedskomponent af motorcyklen som function af tiden?



I

I

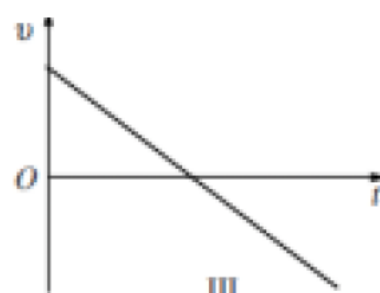
0%



II

II

0%



III

III

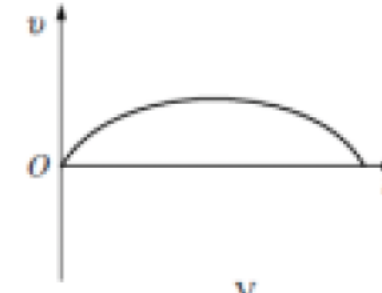
0%



IV

IV

0%

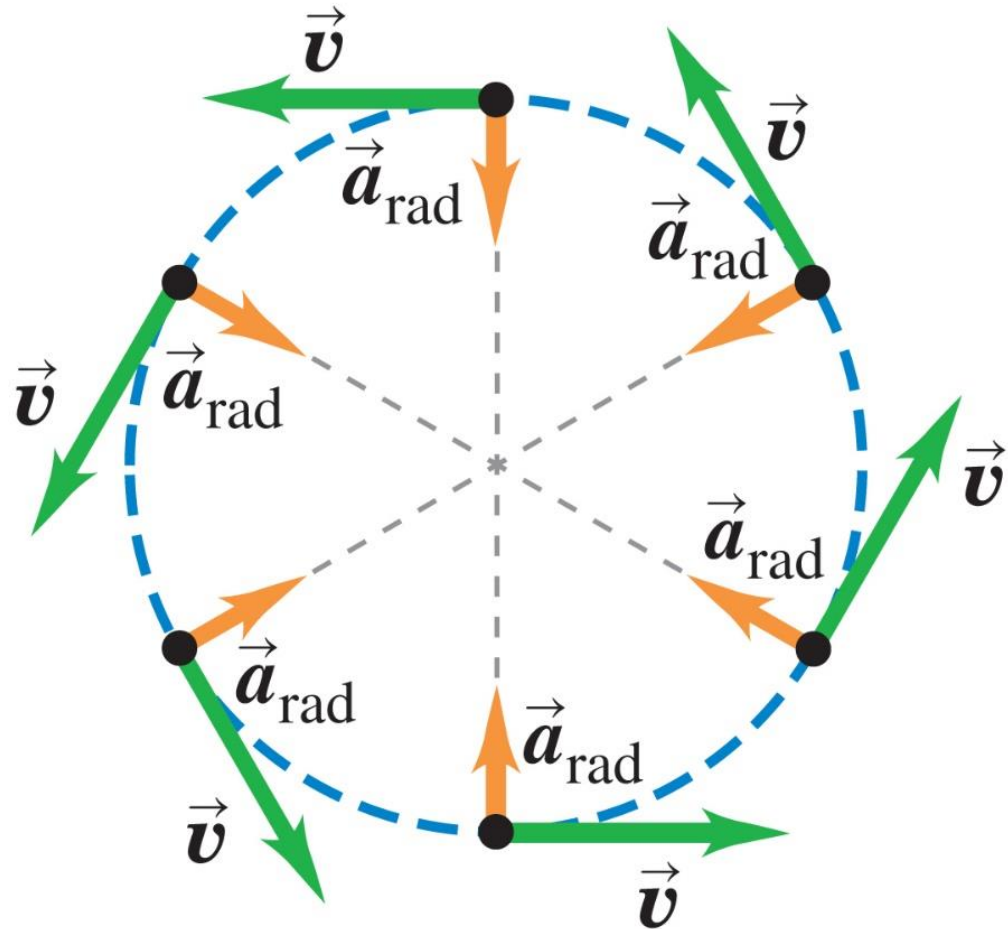


V

V

0%

Cirkulær bevægelse med konstant fart





##/##

Join at: **vevox.app**ID: **192-692-974**

Question slide

En cykelist kører rundt i en cirkel på 30 sekunder og med hastigheden 10 km/t. Hvad er accelerationen som cykelisten bliver påvirket af? (brug $g=9.8 \text{ m/s}^2$)

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

Acceleration er 0.04 g

0%

Acceleration er 0.05 g

0%

Acceleration er 0.06 g

0%

Acceleration er 0.07 g

0%

Acceleration er 0.08 g

0%





##/##

Join at: **vevox.app**ID: **192-692-974**

Results slide

En cykelist kører rundt i en cirkel på 30 sekunder og med hastigheden 10 km/t. Hvad er accelerationen som cykelisten bliver påvirket af? (brug $g=9.8 \text{ m/s}^2$)

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

Acceleration er 0.04 g

0%

Acceleration er 0.05 g

0%

Acceleration er 0.06 g

0%

Acceleration er 0.07 g

0%

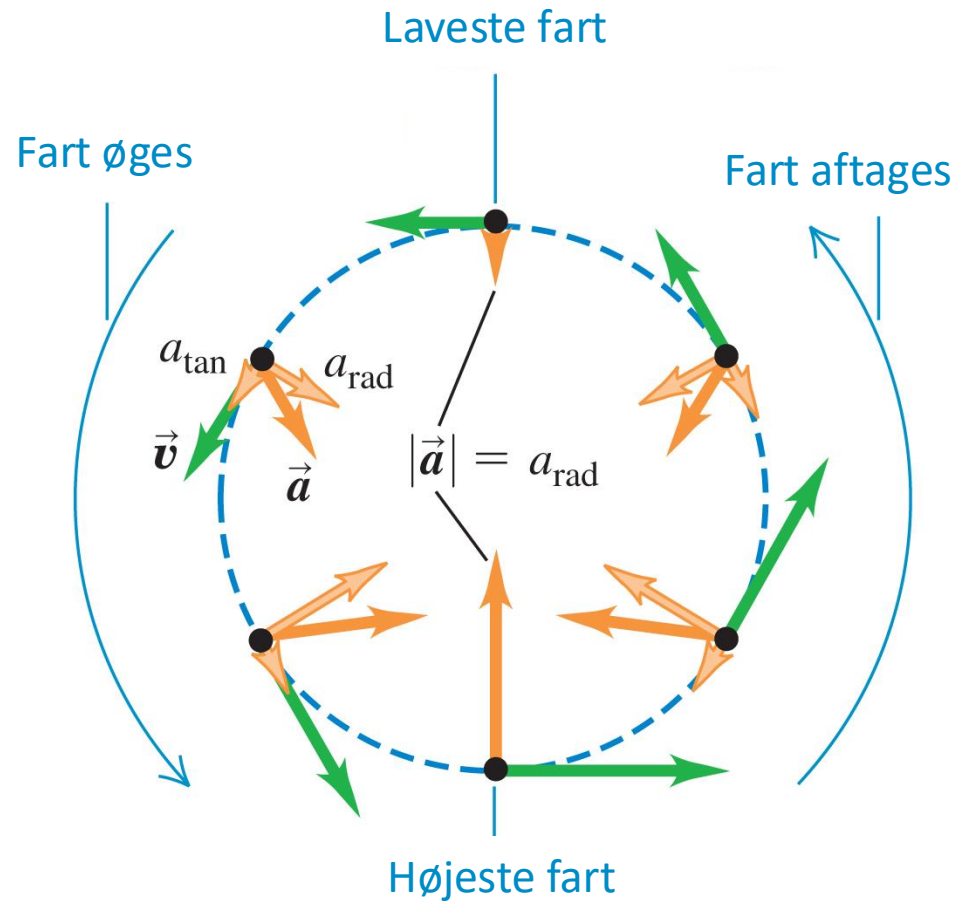
Acceleration er 0.08 g

0%

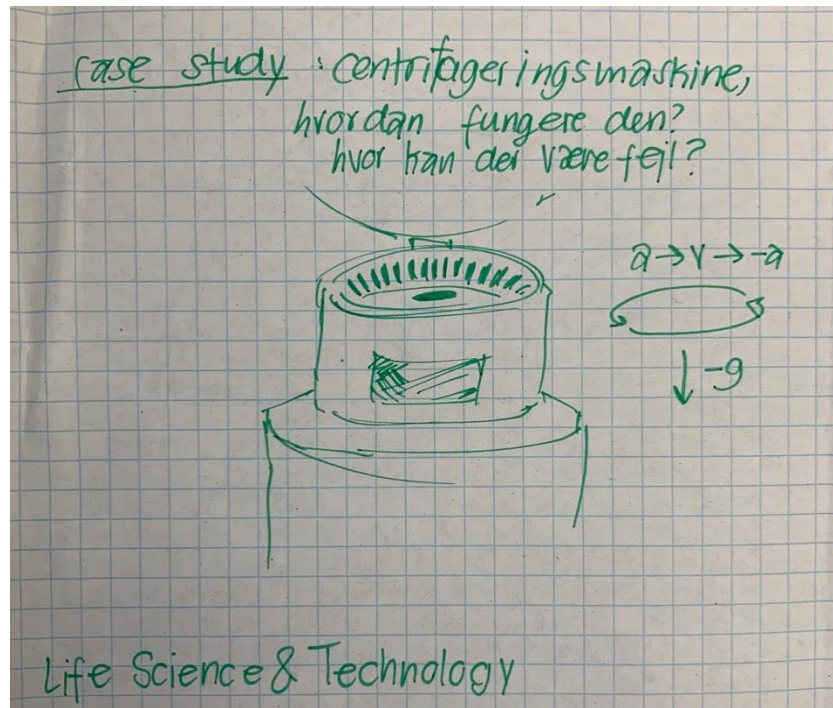


Cirkulær bevægelse med ikke-konstant fart

Eksempel: Lodret loop



Case study

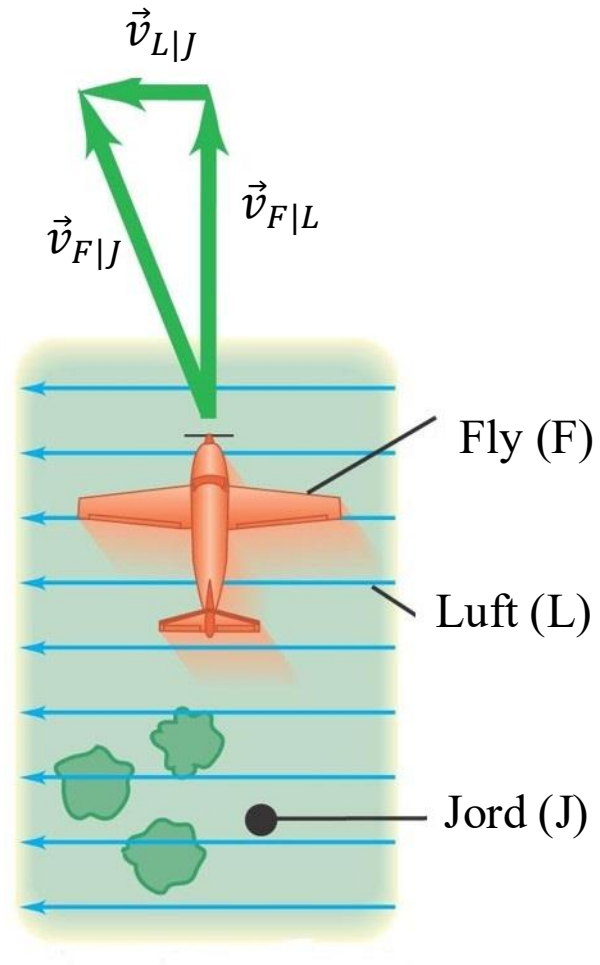


En centrifuge har en konstant tangential acceleration på $a_t = 8\text{ m/s}^2$ i 15 s hvorefter den opnår centrifuge hastigheden.

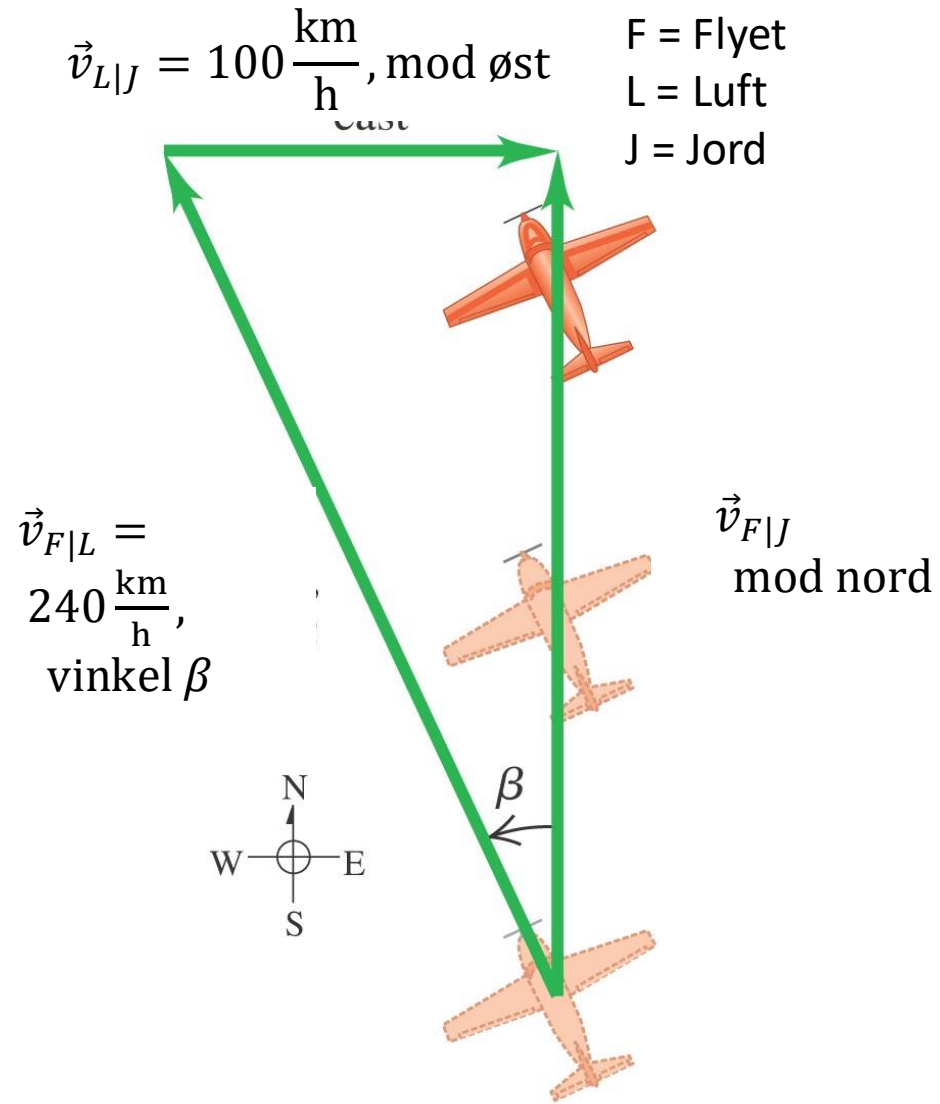
- a) Hvad er denne hastighed?
- b) Hvor mange omdrejninger per minut (rpm) har centrifugen efter accelerationen?

Relativ hastighed i to dimensioner

Hvad er flyets hastighed i forhold til jorden?



Eksempel: Relativ hastighed i to dimensioner



Hvilken kurs skal flyet have for at kompensere for sidevinden?

Feedback on padlet



<https://dtudk.padlet.org/alexbag/input-til-fysik-pg-forel-sninger-g895Ind9fafle6kz>