

Vektorrum over legeme F

Eksempel $V = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$

Definition 10.1.1

Et vektorrum V er en mængde, hvor der er defineret en addition og en skalar multiplikation

således at

$$1) \underline{v} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{v} + \underline{v}) + \underline{w}$$

$$2) \underline{v} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{v}$$

3) Der findes en vektor $\underline{0} \in V$ således at $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$

4) For enhver $\underline{v} \in V$, så findes et additiv invers $-\underline{v}$ (dvs $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$)

$$5) c \cdot (d \cdot \underline{v}) = (c \cdot d) \cdot \underline{v} \text{ for alle } c, d \in F \text{ og } \underline{v} \in V$$

$$6) 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$$

$$7) c \cdot (\underline{v} + \underline{v}) = c \cdot \underline{v} + c \cdot \underline{v}$$

$$8) (c+d) \cdot \underline{v} = c \cdot \underline{v} + d \cdot \underline{v}$$

Eksempel

$$1) V = \mathbb{C}^n, F = \mathbb{C}$$

$$2) V = \mathbb{R}^{m \times n}, F = \mathbb{C}$$

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$3) V = \mathbb{C}[z] = V, F = \mathbb{C}$$

$$4) V = C_b(\mathbb{R}), F = \mathbb{R}$$

mængden af alle funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som kan differentieres uendeligt mange gange

$$f, g \in C_b(\mathbb{R})$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$r \mapsto f(r) \quad r \mapsto g(r)$$

$f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved forskriften

$$(f+g)(r) = f(r) + g(r)$$

$$5) V = \mathbb{C}, F = \mathbb{R}$$

$$6) V = \mathbb{C}, F = \mathbb{C}$$

$$c \in \mathbb{R} \quad c \cdot f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(c \cdot D)f = f' \cdot c$$

Definition 10.2.1

V et vektorrum over F , vektorne $v_1, \dots, v_n$ kaldes lineært uafhængige
 $v_1, \dots, v_n \in$ vektorer hvis ligningen $c_1 \cdot v_1 + \dots + c_n \cdot v_n = 0$ ($c_1, \dots, c_n \in F$)
kun har løsningen $c_1 = 0, \dots, c_n = 0$

Eksempel $V = \mathbb{C}, F = \mathbb{R}$

Er 1 og i lineært uafhængige?

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot i = 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow c_1 + c_2 i = 0 \quad \text{Ja, kun } 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ og } c_2 = 0$$

Definition 10.2.2

V et vektorrum over F , S en mængde af vektorer i V
vektorerne i S kaldes lineært uafhængige hvis ethvert endeligt
udvalg af vektorer i S er lineært uafhængige.

Eksempel

$$V = \mathbb{R}[Z], F = \mathbb{R}$$

$$S = \{1, Z, Z^2, Z^3, \dots\}$$

Polynomierne er lineært uafhængige fordi

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot Z + c_3 \cdot Z^2 + \dots + c_{n+1} \cdot Z^n = 0 \leftarrow \text{Nullpolynomiet: } 0 \cdot 1 + 0 \cdot Z + 0 \cdot Z^2 + \dots$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, \dots, c_{n+1} = 0 \quad \text{Konklusion, alle polynomier i } S \text{ er lineært uafhængige}$$

Span af vektorer

Definition 10.2.3

V et vektorrum over F

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$$

Hvis S er en mængde af vektorer i V defineres $\text{Span}_F(S)$ som mængden af alle mulige lineære kombinationer af endelige mange vektorer i S

$$\text{Span}_F(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \{c_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + c_n \cdot \underline{v}_n \mid c_1, \dots, c_n \in F\}$$

Eksempel $V = \mathbb{R}[z], F = \mathbb{R}$

$$\text{Span}_{\mathbb{R}}(1, z, z^2) = \{c_1 + c_2 z + c_3 z^2 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$$

alle polynomier af grad højst 2

$$\text{Span}_{\mathbb{R}}(1, z, z^2, z^3) = \text{alle polynomier af grad højst 3}$$

OSV...

$$S = \{1, z, z^2, z^3, \dots\}$$

$$\text{Span}_{\mathbb{R}}(S) = \mathbb{R}[z]$$

alle polynomier

Underrum af et vektorrum

Definition 10.4.1

V et vektorrum over F

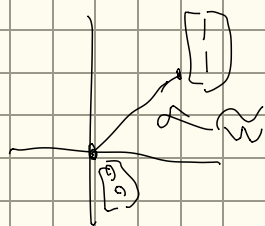
$W \subseteq V$ endelmængde af V , kaldes et underrum af V hvis W selv er et

vektorrum med den samme addition og skalarmultiplikation

$$\tilde{W} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \tilde{W}$$

$\tilde{W}$ er ikke et underrum



Eksempel
 $V = \mathbb{R}^2, W = \text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$



W er et underrum af $\mathbb{R}^2$ da du forbliwer på $\text{Span}(1)$ som eget hvad i ff addition og skalarmult...

Lemmen 10.4.2

$W \subseteq V$ er et underrum af V $\rightarrow$
hvis for enhver $u, v \in W$ og $c \in \mathbb{F}$
det gælder at $u + c \cdot v \in W$

konsekvens $S \subseteq V$ en delmængde
så er $\text{span}_{\mathbb{F}}(S)$ et underrum af V

Definition 10.2.4

V et underrum over $\mathbb{F}$

$(v_1, \dots, v_n)$ kaldes en ordnet basis for V hvis

1) $\text{span}_{\mathbb{F}}(v_1, \dots, v_n) = V$

2) Sættet er lineært uafhængigt

mængden $\{v_1, \dots, v_n\}$ kaldes en basis for V

mere generelt kaldes en delmængde $S \subseteq V$ en basis for V hvis

1) $\text{span}_{\mathbb{F}}(S) = V$

2) vektorene i S er lineært uafhængige

Antallet af vektorer i en basis for V kaldes
dimensionen af V : $\dim_{\mathbb{F}}(V)$

Eksempel

1) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en ordnet
basis for $\mathbb{R}^2$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ er en basis
for $\mathbb{R}^2$

2) $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

$(1, i)$ er en ordnet basis

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$)

3) $V = \mathbb{R}[Z]$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

$S = \{1, Z, Z^2, \dots\}$

er en basis for $\mathbb{R}[Z]$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[Z]) = \infty$

3) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

ordnet basis

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 4$

Definition 10.2.5 (masen til def. 9.5.1)

V et vektorrum over F af endelig dimension m
og $B = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$ en ordnet basis for V

For $\underline{v} \in V$, skriv $\underline{v} = c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_m \underline{v}_m$ ($c_1, \dots, c_m$ er entydige)

Da defineres $[\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in F^m$ "B-koordinatvektorer"

Lemma 10.2.3

$$[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B \quad \underline{u}, \underline{v} \in V$$

$$[c \cdot \underline{u}]_B = c \cdot [\underline{u}]_B \quad c \in F, \underline{u} \in V$$

konsekvens

$$[c_1 \underline{u}_1 + \dots + c_n \underline{u}_n]_B = c_1 [\underline{u}_1]_B + \dots + c_n [\underline{u}_n]_B$$

Sætning 10.2.4

V et vektorrum over F med ordnet basis $B = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n \in V$ er lineært uafhængige

$\Leftrightarrow$

$[\underline{u}_1]_B, \dots, [\underline{u}_n]_B \in F^m$ er lineært uafhængige

En anden konsekvens

Hvis $\text{Span}_F([\underline{u}_1]_B, \dots, [\underline{u}_n]_B)$ har ordnet basis $([\underline{v}_1]_B, \dots, [\underline{v}_d]_B)$

Så har $\text{Span}_F(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$ ordnet basis $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d)$

Eksempel

$V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $F = \mathbb{R}$, B som før. Bestem en ordnet basis for

$$\text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \right) = W$$

$$\text{Svar: } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

En ordnet basis for $\tilde{W}$ bestemmes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

er en ordnet basis for $\tilde{W}$

Derfor er $\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$ en ordnet basis for W

Opgaver

1) a) $\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dim: 4

$\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$ dim: 3

2) a) ja, da

$$a + bz + (z^2 + d \cdot (e + fz + gz^2)) =$$

$$(a + d \cdot e) + (b + d \cdot f)z + (c + d \cdot g)z^2$$

som også m² være i W

b) ja pga $1 \cdot a + b \cdot z + c \cdot z^2$

ja pga $1 \cdot (a-b) + (1+z)(b-c) + (1+z+z^2) \cdot c$

1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$

3) a)

1: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2: nulpolynomiet

3: Det komplekse tal 0

b)

1: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dim: 8

2: $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$ dim: ∞

3: $\{1, i\}$ dim: 2

- 4)
1. Linear afhængig: $\begin{bmatrix} 1+i \\ -1+i \end{bmatrix} = (1+i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 2. Linear afhængig: $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 3. Linear uafhængige. Pga det i reelle vektorrum
 4. Linear afhængige: $3+12z+5z^2+2z^3 = 2 \cdot (2+7z+3z^2+z^3) - (1+2z+z^2)$

5)

a) $w_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

1. ja da alle $u + C \cdot v \in W_1$
for alle $u, v \in W_1$ og $C \in \mathbb{R}$
da der ikke forbliver noget
er denne matrix også EW.

2. ja. ligesom for bare $w_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$ så $u, v \in A$ ut C.V
vil også altid være i A
gælder
altså: $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) 1. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ dim: 5

2. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ dim: 3

3. $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ dim: 3

6)

$w_1: ja$

$w_2: Nej$ fordi hvis u, v begge har multipl. 1, har $u+v$ mult. 2

$w_3: ja$

7)

$\text{Span}(w)$ er underrum.
Løsningsmængden er
endeligspændende, som
blev fundet. dim: 3

b) $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja

Lille dag

V et vektorrum over F af dimension n .

$\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ en ordnet basis for V

$\underline{v} \in V$ så findes entydigt bestemte $c_1, \dots, c_n$ således at:

$$\underline{v} = c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_n \underline{v}_n \quad [\underline{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \beta\text{-koordinatvektor for } \underline{v}$$

Sætning 10.2.7

Lad $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in V$ være lineært uafhængige vektorer
så er $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n)$ en ordnet basis for V

Eksempel $V = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$ og $\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ (ordnet standard basis)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ fordi } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hvis nu $\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \dots = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Eksempel 8.1.3

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Generelt

V er vektorrum over F af dimension n

$\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$, $\gamma = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n)$ to ordnede baser for V

Hvis $[\underline{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in F^n$ er β -koordinatvektoren for $\underline{v} \in V$, så

$$[\underline{v}]_{\gamma} = [c_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + c_n \cdot \underline{v}_n]_{\gamma}$$

$$= c_1 \cdot [\underline{v}_1]_{\gamma} + \dots + c_n \cdot [\underline{v}_n]_{\gamma}$$

Seening 10.3.4

$$[\underline{v}]_{\gamma} = \begin{bmatrix} [\underline{v}_1]_{\gamma} & \dots & [\underline{v}_n]_{\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \gamma \stackrel{M}{=} \beta \cdot [\underline{v}]_{\beta}$$

$n \times n$ matrix

er invertibel da dens søjler
er lineært uafhængige

Notation for matrixen: $\gamma \stackrel{M}{=} \beta$

Kaldes en basisskriftmatrix

Eksempel $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \quad \gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\gamma \stackrel{M}{=} \beta = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\gamma} & \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lemma 10.3.2 $\dim(V) = n$

V et vektorrum over $\mathbb{F}$

β, γ, δ ordnede baser for V

$$\gamma \stackrel{M}{=} \beta \cdot [\gamma]_{\beta} = [\gamma]_{\gamma}$$

$$1) \gamma \stackrel{M}{=} \beta = \gamma \stackrel{M}{=} \gamma \cdot \gamma \stackrel{M}{=} \beta$$

$$\cancel{(\gamma \stackrel{M}{=} \beta)} \cdot \cancel{\gamma \stackrel{M}{=} \beta} \cdot [\gamma]_{\beta} = [\gamma]_{\gamma} \cdot (\gamma \stackrel{M}{=} \beta)^{-1}$$

$$2) \beta \stackrel{M}{=} \beta = \mathbb{I}_n$$

$$3) (\gamma \stackrel{M}{=} \beta)^{-1} = \beta \stackrel{M}{=} \gamma$$

Eksempel

$$V = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

(er et underrum over $\mathbb{R}^{2 \times 2}$)

$$V \text{ har ordnet basis } \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \beta$$

(Det kan ses at de givne 3 matricer er lin. afhængige)

$$\text{Anden ordnet basis } \gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$\underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3$

$$\text{Det oplyses at } \underline{w}_1 = \underline{v}_1, \underline{w}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{w}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3$$

Opgave

a) vis at γ er en ordnet basis for V . vis at $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ er lin. afhængige

b) Beregn $\gamma \stackrel{M}{=} \beta$

$$\begin{aligned} a) \underline{w}_1 = \underline{v}_1 \quad [\underline{w}_1]_{\beta} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{w}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \quad [\underline{w}_2]_{\beta} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \underline{w}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 \quad [\underline{w}_3]_{\beta} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bemerk at $[\underline{w}_1]_{\beta}, [\underline{w}_2]_{\beta}, [\underline{w}_3]_{\beta}$ er lin. afhængige fordi:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1 - 1) = -2 \neq 0$$

Så er $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ også lin. afhængige (se s. 10.2.7)

b) $\gamma \stackrel{M}{=} \beta$ bestimmen

$$\beta \stackrel{M}{=} \gamma = \left[\begin{array}{c} \underline{w_1} \\ \underline{w_2} \\ \underline{w_3} \end{array} \right]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma \stackrel{M}{=} \beta = \left(\beta \stackrel{M}{=} \gamma \right)^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Opgaver

1) a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -10 & -17 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$

2) a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -3 & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\gamma \stackrel{M}{=} \epsilon \cdot \epsilon \stackrel{M}{=} \beta \stackrel{M}{=} \gamma \stackrel{M}{=} \beta$

$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 7 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -17 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$

3) a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4+1 \\ 4+1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$

4)

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = (p_1(z), p_2(z), p_3(z))$$

b) $p(z) = p_4(z) - p_3(z) + 2p_1(z) - p_2(z)$. Fr: W

Find lin. komb. of $p_3(z)$ mod $p_1(z)$ or $p_2(z)$.

$$p_3(z) = \frac{17}{7}p_1 - \frac{9}{7}p_2$$

$$p(z) = -\left(\frac{17}{7}p_1 - \frac{9}{7}p_2\right) + 2p_1 - p_2$$

$$= -\frac{17}{7}p_1 + \frac{9}{7}p_2 + \frac{14}{7}p_1 - \frac{7}{7}p_2 = -\frac{3}{7}p_1 + \frac{2}{7}p_2$$

$$[p(z)]_{\beta} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ 2/7 \end{bmatrix}$$

c) ja.

d)

$$x^M_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{\gamma} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta^M_{\gamma} = (x^M_{\beta})^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot (1-z) - 5 \cdot (1+z) + 3 \cdot (1-z^2)$$

$$\cancel{5} - 5z - \cancel{5} - 5z + 3 - z^2$$

$$-z^2 - 10z + 3$$

$$a \cdot (-4z^2 + 4z + 2) + b \cdot (2z^2 + z - 4)$$

27,

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ -7 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$