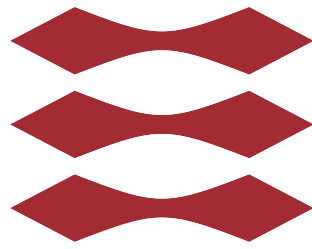


DTU



Andenordens lineære differential- ligninger med konstante koefficien- ter

Date: 02 December 2025

Semester: Spring 2025

Rasmus Rosendahl-kaa

Definition (13.3.1)

$$f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = q(t) \quad (1)$$

$$a_0, a_1 \in \mathbb{R}, q(t) \in C_{\infty}(\mathbb{R})$$

Kaldes en lineær andenordens differentialligning

Er $q(t) = 0$, kaldes ligningen **homogent**, ellers **inhomogent**

Theorem (Sætning 13.3.1)

$f(t)$ er løsning til $f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = q(t)$ hvis og kun hvis $\begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{bmatrix}$ er løsning til systemet:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Løsninger til det homogene system

Skriv $f_1(t) = f(t)$ og $f_2(t) = f'(t)$. Så fås:

$$f_1'(t) = f'(t) = f_2(t) \quad (3)$$

$$f_2'(t) = f''(t) = -a_1 f'(t) - a_0 f(t) + q(t) \quad (4)$$

$$= -a_1 f_2(t) - a_0 f_1(t) + q(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

For nu: antag $q(t) = 0$. Dvs vi er i det homogene tilfælde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a_0 \\ -a_1 & & \end{bmatrix}$$

1) Undersøg A 's egenverdier.

$$P_A(z) = \det \left(\begin{bmatrix} -z & 1 \\ -a_0 & -1-z \end{bmatrix} \right) = -z \cdot (-a_1 - z) - 1 \cdot (-a_0) \quad (6)$$

$$= z^2 + a_1 z + a_0$$

Rødder findes i $P_A(z)$.

Diskriminant: $D = a_1^2 - 4a_0$

Rødder: $\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$

2) Egenrummene: λ er en egenverdi

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda \cdot I_2) \quad (7)$$

$$= \ker \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{bmatrix} \right)$$

Vektoren $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{bmatrix}$ må have rang 1 da λ er en egenverdi og hvis rang var 2, ville kernen være nulvektoren. Dvs at vi må have mindst én nulrække:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} v \in E_\lambda, v &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ -\lambda \cdot a + b &= 0 \\ E_\lambda &= \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Nu skælner vi mellem 3 tilfælde:

1) $D > 0$: A har to forskellige egenverdier i $\mathbb{R}$

Fra sidste uge: har systemet $f'(t) = A \cdot f(t)$ fuldstændige løsning

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \\ \lambda_1 &= \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

Derfor har differentialligningen $f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0$ har fuldstændige løsning ($f(t) = f_1(t)$):

$$f(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \quad (11)$$

Note

Skal man i en opgave finde den fuldstændige løsning, hvor a_0, a_1 er givet, kan man strakt skrive det karakteristiske polynomium ned: $P_A(z) = z^2 + a_1 z + a_0$

2) $D < 0$. $\sqrt{D} = i \cdot \sqrt{|D|}$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-a_1 + i\sqrt{|D|}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a_1 - i\sqrt{|D|}}{2} \\ (\overline{\lambda_1} &= \lambda_2) \end{aligned} \quad (12)$$

Fr sidste lille dag har systemet $f'(t) = A \cdot f(t)$ har fuldstændige løsning:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \cdot \text{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1 t} \right) + c_2 \cdot \text{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1 t} \right) \\ (c_1, c_2 &\in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (13)$$

Vi er ligeglad med $f_2(t)$. Vi ved: $\lambda_1 = \frac{-a_1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{|D|}}{2} = \alpha + i\beta, \left(\alpha = -\frac{a_1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2} \right)$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} \cdot (\cos(\beta t) + i \cdot \sin(\beta t)) \\ &= e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \end{aligned} \quad (14)$$

Derfor har $f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 f(t) = 0$ fuldstændige løsning

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \\ (c_1, c_2 &\in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (15)$$

3) $D = 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{0}}{2}$. $\text{am}(\lambda_1) = 2$.

$$E_{\lambda_1} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}\right) \text{ dvs } \text{gm}(\lambda_1) = 1$$

En løsning er $f(t) = e^{\lambda_1 t}$

Idéen for at finde den fuldstændige løsning til $f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0$ hvis $D = 0$

Vi ved $\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0 = 0$ og $2\lambda_1 + a_1 = 0$

Prøv at find en løsning på formen:

$$f(t) = g(t) \cdot e^{\lambda_1 t} \quad (16)$$

Så gælder:

$$f'(t) = g'(t) \cdot e^{\lambda_1 t} + g(t) \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \quad (17)$$

og

$$f''(t) = g''(t) \cdot e^{\lambda_1 t} + g'(t) \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + g'(t) \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + g(t) \cdot \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} \quad (18)$$

Indsættes udtrykkene for f, f', f'' i $f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0$ fås:

$$e^{\lambda_1 t} \cdot g''(t) = 0 \quad (19)$$

Da $e^{\lambda_1 t}$ ikke kan være 0, fås: $g''(t) = 0$. Dsv:

$$g'(t) = c_1 \quad (20)$$

$$g(t) = c_1 \cdot t + c_2, (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Husk $f(t) = g(t) \cdot e^{|\lambda_1 t|}$.

Derfor: Hvis $D = 0$, så har $f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0$ den fuldstændige løsning:

$$f(t) = c_1 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_1 t}, (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \quad (21)$$

Example

Find fuldstændige løsninger for $f''(t) + 4f'(t) + 4f(t) = 0$

Solution:

Det karakteristiske polynomium er $z^2 + 4z + 4$.

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{4}{2} = -2$$

Den fuldstændige løsning: $f(t) = c_1 \cdot t \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-2t}, (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Example

Find fuldstændige løsninger for $f''(t) + 4f'(t) + 13f(t) = 0$

Solution:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$$

$$P_A(z) = z^2 + 4z + 13$$

$$\lambda_1 = \frac{-4+6i}{2} = -2 + 3i$$

Den fuldstændige løsning: $f(t) = c_1 \cdot e^{-2t} \cdot \cos(3t) + c_2 e^{-2t} \cdot \sin(3t), (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Løsninger til det inhomogene system

Corollary (13.3.2)

$$f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = q(t), (q(t) \neq 0) \quad (22)$$

Lad $f_p(t)$ være en partikulær løsning til den givne differentialligning, så er den fuldstændige løsning:

$$f(t) = f_p(t) + f_h(t) \quad (23)$$

hvor $f_h(t)$ er den fuldstændige løsning til $f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0$

Example

Find den fuldstændige løsning til:

$$f''(t) + 4f'(t) + 4f(t) = \cos(2t) \quad (24)$$

Solution:

Vi kender den fuldstændige løsning til den homogene ligning, $f_h(t)$, fra tidligere eksempel: $f_h(t) = c_1 \cdot t \cdot e^{-2t} + c_2 e^{-2t}$

Vi skal finde en partikulær løsning. Man skal "gætte" på strukturen af en partikulær løsning

Et gæt kunne være: $f_p(t) = a \cdot \cos(2t)$. Ville ikke være rigtigt fordi $\cos(2t)' = -2\sin(2t)$, som vi ikke kan komme af med i vores ligning (som skal være lig med $\cos(2t)$).

Et andet gæt kunne være: $f_p(t) = a \cdot \cos(2t) + b \cdot \sin(2t)$. Så fås:

$$\begin{aligned} f_p'(t) &= a \cdot -\sin(2t) \cdot 2 + b \cdot \cos(2t) \cdot 2 \\ f_p''(t) &= a \cdot -\cos(2t) \cdot 4 + b \cdot -\sin(2t) \cdot 4 \end{aligned} \quad (25)$$

Vi skal nu se om vi kan finde a, b så alt hænger sammen.

Indsætter det i ligningen $f''(t) + 4f'(t) + 4f(t) = \cos(2t)$:

$$\underbrace{-4a \cdot \cos(2t) - 4b \cdot \sin(2t)}_{f''(t)} + 4 \cdot \underbrace{(-2a \cdot \sin(2t) + 2b \cdot \cos(2t))}_{f'(t)} + 4 \cdot \underbrace{(a \cos(2t) + b \sin(2t))}_{f(t)} = \cos(2t) \quad (26)$$

Kan samle alt med $\cos(2t)$ sammen, som skal give $\cos(2t)$ og alt med $\sin(2t)$ sammen, som skal give 0.

$$\begin{aligned} (-4a + 8b + 4a) \cdot \cos(2t) + (-4b - 8a + 4b) \cdot \sin(2t) &= \cos(2t) \\ 8b \cdot \cos(2t) - 8a \cdot \sin(2t) &= \cos(2t) \\ 8b &= 1, b = \frac{1}{8} \\ 8a &= 0, a = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Dvs. $f_p(t) = 0 \cdot \cos(2t) + \frac{1}{8} \cdot \sin(2t)$ er en partikulær løsning.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{8} \sin(2t) + c_1 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} \\ (c_1, c_2 &\in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (28)$$

Er den ønskede fuldstændige løsning

Begyndelsesbetingelser/Begyndelsesværdibetingelser

$$f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = q(t)$$

$$\begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{bmatrix} \text{ er en løsning til } \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix} \leftarrow \text{Begyndelsesværdibetingelse: } \begin{cases} f_1(t_0) = y_0 \\ f_2(t_0) = z_0 \end{cases}$$

$$\text{Da } f_1(t) = f(t) \text{ og } f_2(t) = f'(t) \text{ er begyndelsesværdibetingelse: } \begin{cases} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Ligesom til systemer, kan man hvis man har den fuldstændige løsning bestemme de ubekendte vha. begyndelsesværdibetingelserne.

Example

Find $f(t) \in C_\infty(\mathbb{R})$ som opfylder differentialligningen $f''(t) + 4f'(t) + 4f(t) = \cos(2t)$ og begyndelsesbetingelsen $f(0) = 1$ og $f'(0) = 0$.

Solution:

Vi kender den fuldstændige løsning:

$$f(t) = c_1 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{8} \sin(2t) \quad (29)$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 0 \quad (30)$$

Før $f'(0)$ kan regnes, skal $f'(t)$ findes

$$\begin{aligned} f'(t) = c_1 \cdot (1 \cdot e^{-2t} + t \cdot -2e^{-2t} + t \cdot -2e^2t) \\ + c_2 \cdot (-2 \cdot e^{-2t}) + \frac{1}{8} \cdot \cos(2t) \cdot 2 \end{aligned} \quad (31)$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 \cdot -2 + \frac{1}{8} \cdot 2 = 0 \quad (32)$$

Derfor: $c_1 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

Den ønskede løsning er:

$$f(t) = te^{-2t} + \frac{7}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}\sin(2t) \quad (33)$$