

01017 E20 Eksamen

- 1 $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)) : \mathbf{T}$
- 2 $\forall x \forall y (P(x, y) \leftrightarrow P(y, x)) : \mathbf{F}$



B er korrekt	☒	☐
C er korrekt	☐	☒
D er korrekt	☒	☐
E er korrekt	☐	☒
F er korrekt	☒	☐
G er korrekt (Begge svar accepteres)	☒	☒
H er korrekt	☒	☐
I er korrekt	☐	☒
J er korrekt	☒	☐
K er korrekt	☐	☒
L er korrekt	☒	☐
M er korrekt	☐	☒
N er korrekt	☐	☒

(10%) Betragt fortolkningen F givet ved

- $\text{dom}(F) = \text{alle mennesker}$
- $P^F = \{x \mid x \text{ følger kursus 01017}\}$
- $Q^F = \{x \mid x \text{ studerer på DTU}\}$

Vi ønsker at finde korrekte formaliseringer af følgende sætning:

"Alle som følger kursus 01017 studerer på DTU".

Hvilke af følgende formler er korrekte formaliseringer af sætningen?

Hint: Hvis en formel A er en korrekt formalisering, og A og B er logisk ækvivalente, så tæller vi også B som en korrekt formalisering, for så udtrykker de to formler logisk set det samme. Eksempelvis tæller $p \rightarrow q$ og $\neg q \rightarrow \neg p$ derfor begge som korrekte formaliseringer af sætningen "Hvis Peter er glad, er Line glad", hvor p står for at Peter er glad og q for at Line er glad.

Select the correct answers

	korrekt formalisering	ikke korrekt formalisering
$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	☒	☐
$\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$	☐	☒
$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	☐	☒
$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	☐	☒
$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$	☐	☒
$\neg \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$	☒	☐

(10%) Hvis nedenstående sætninger sættes i rigtig rækkefølge, vil de udgøre et sprogligt bevis for følgende påstand:

$$A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C).$$

For hver af sætningerne skal du angive hvad nummer den skal være i rækkefølgen i beviset. Den sætning som skal stå først skal markeres med 1, den næste skal markeres med 2, osv.

Eksempel. Hvis du skulle gøre det samme for teksten til Mester Jakob, ville det korrekte svar se således ud:

Vælg en svarmulighed på hver linje	1	2	3	4
Hører du ej klokken? Hører du ej klokken?	☐	☐	☒	☐
Sover du? Sover du?	☐	☒	☐	☐
Bim bam bum. Bim bam bum.	☐	☐	☐	☒
Mester Jakob, Mester Jakob	☒	☐	☐	☐

Select the correct answers

	1	2	3	4	5	6
Lad $x \in A \cap (B - C)$ være valgt vilkårligt.	☒	☐	☐	☐	☐	☐
Så fås $x \in A, x \in B$ og $x \notin C$.	☐	☐	☒	☐	☐	☐
Så gælder $x \in A \cap B$ og $x \notin A \cap C$.	☐	☐	☐	☒	☐	☐
Det betyder at $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$.	☐	☐	☐	☐	☒	☐
Da $x \in A \cap (B - C)$ var valgt vilkårligt, viser dette at mængden på venstresiden af inklusionstegnet er en delmængde af mængden på højre.	☐	☐	☐	☐	☐	☒
Da gælder $x \in A$ og $x \in B - C$.	☐	☒	☐	☐	☐	☐

(10%) Lad F være fortolkningen givet ved

- $\text{dom}(F) = \text{alle mennesker}$
- $P^F = \{x \mid x \text{ følger kursus 01017}\}$
- $Q^F = \{x \mid x \text{ er studerende på DTU}\}$
- $K^F = \{(x, y) \mid x \text{ kender } y\}$

Betragt følgende formel:

$$\forall x(\forall y(Q(y) \rightarrow K(x, y)) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow K(x, y)))$$

Hvilken af følgende sætninger kan formelen oversættes til under fortolkningen F ?

Choose one answer

- ☒ "Enhver som kender alle studerende på DTU, kender alle som følger kursus 01017"
- ☐ "Enhver som kender alle der følger kursus 01017, kender alle studerende på DTU"
- ☐ "Enhver som kun kender studerende på DTU, kender kun personer der følger 01017"
- ☐ "Enhver som kun kender personer der følger 01017, kender kun studerende på DTU"
- ☐ "Enhver som kender nogen der studerer på DTU, kender nogen som følger kursus 01017"
- ☐ "Enhver som kender nogen der følger kursus 01017, kender nogen der studerer på DTU"
- ☐ Formlen kan ikke oversættes til nogen af de angivne sætninger

(4%) Vi betragter et kvadratisk skema med 4 gange 4 felter. På hvor mange måder kan vi udfylde skemaet med tal fra mængden $\{1, 2, 3, 4\}$, når vi kræver at det samme tal ikke må stå to (eller flere) gange i samme række?

Choose one answer

☐ 4^4

☐ 4^{16}

☒ $(4!)^4$

☐ $\binom{16}{4} \binom{12}{4} \binom{8}{4} \binom{4}{4}$

(5%) Lad $R_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $R_2 = \{1, 2, 5, 6\}$ og $M = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$. Afgør hvor mange delmængder $K \subseteq M$ der findes så

- $|K| = 6$,
- $(R_1 \subseteq K) \vee (R_2 \subseteq K)$.

Et anden måde at stille samme spørgsmål er: Antag vi i et banko spil har pladerne R_1 og R_2 . På hvor mange måder kan vi trække 6 forskellige tal fra M , når vi ikke skelner mellem rækkefølge, så vi får banko på mindst en af pladerne?

Choose one answer

☐

$$\binom{100}{4} + \binom{100}{4} - \binom{100}{2}$$

☐

$$2 \cdot 96 \cdot 95$$

☒

$$\binom{96}{2} + \binom{96}{2} - 1$$

☐

$$\binom{96}{2}^2$$

☐

$$\binom{100}{4} + \binom{100}{4}$$

☐

$$\binom{100}{6}$$

☐

$$2\binom{98}{2}$$

(12%) Lad $M = \mathbb{N} - \{0\}$, og definer $f(n)$ for $n \in M$ ved

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \text{ ulige,} \\ 2f(\frac{n}{2}) & \text{for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

Afgør om følgende udsagn er sande -

Select the correct answers

Sand

Falsk

$$f(4) = 4$$



$$\forall n \in M (f(n) = n)$$



$$\forall a \in M \forall b \in M (f(ab) = f(a)f(b))$$



$$\forall n \in M (f(n) \leq n)$$



$$\forall a \in M \forall b \in M (f(a + b) = f(a) + f(b))$$



$$\exists k \in M (f(k) = 17)$$



(4%) Her er en kørsel af Euklids algoritme, hvor dog nogle af tallene er erstattet af symboler (a, b, c):

q	r	s	t
–	720	1	0
–	300	0	a
2	b	1	–2
2	60	–2	c
2	0	5	–12

Angiv værdierne af a, b og c samt $\text{sfd}(720, 300)$

Select the correct answers	-5	-4	0	1	2	4	5	60	120
a	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
b	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
c	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
sfd(720, 300)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

(12%) Betragt systemet af kongruensligninger:

$$\begin{cases} 2x \equiv a \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{14} \end{cases}$$

Angiv løsningsmængden for hver af de følgende værdier af a .

Select the correct answers

$$a = 0$$

$\emptyset$	$7 + 42\mathbb{Z}$	$21 + 42\mathbb{Z}$	$7 + 84\mathbb{Z}$	$63 + 84\mathbb{Z}$
☐	☐	☒	☐	☐

$$a = 1$$

☒	☐	☐	☐	☐
----------------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

$$a = 2$$

☐	☒	☐	☐	☐
-----------------------	----------------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

(8%) Angiv en multiplikativ invers (mod 17) til tallene 3, 6, 7 og 8.

Select the correct answers

	-7	-6	-2	2	3	4	5	6
3	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
6	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
8	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

(5%) Lad

$$N(x) = 32x^3 - 60x^2 + 44x - 11, \text{ og}$$

$$M(x) = 8x^3 - 16x^2 + 12x - 3.$$

Kører vi Euklids algoritme får vi

k	$r_k(x)$
0	$32x^3 - 60x^2 + 44x - 11$
1	$8x^3 - 16x^2 + 12x - 3$
2	$4x^2 - 4x + 1$
3	$2x - 1$
4	0

Afgør sandhedsværdien af følgende udsagn.

Select the correct answers

Sand

Falsk

 $N(x)$ og $M(x)$ har ingen fælles rødder☐☒ $x_0 = -\frac{1}{2}$ er en fælles rod for $N(x)$ og $M(x)$ ☐☒ $\text{sfd}(N(x), M(x)) = 0$ ☐☒ $\deg(\text{sfd}(N(x), M(x))) = 1$ ☒☐Rest ved division af $N(x)$ med $M(x)$ er $4x^2 - 4x + 1$ ☒☐