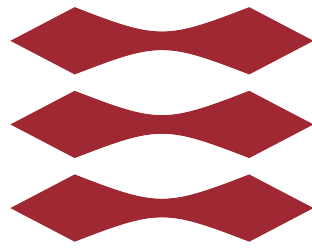


DTU



Mat1a gennemgang

Date: 30 November 2025

Semester: Spring 2025

Rasmus Rosendahl-kaa

Udsagnslogik

Important

Til eksamen: husk sandhedstabeller

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T

Ved $P \Rightarrow Q$ så hvis P er falsk, så vil $P \Rightarrow Q$ altid være sand. Hvis P er sand, skal Q også være sand.

Example

$$(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$$

Opskriv sandhedstabel

P	Q	R	$P \vee Q \vee R$	$(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	F	T	T	F
T	T	F	T	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	F
F	F	F	F	T

$$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$$

Mængder

Samling af elementer.

Kan være f.eks.:

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\{a \in \mathbb{R} \mid P(a) \text{ er sandt}\} \quad (1)$$

Man kan tegne mængderne grafisk.

Fællesmængder:

$$A \cap B$$

Hvad der er i både A og B

$$A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\} \quad (2)$$

Foreningsmængde:

$$A \cup B$$

Hvad der er i enten A eller B

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\} \quad (3)$$

Differens:

$$A/B$$

Hvad der er i A men ikke B

$$A/B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\} \quad (4)$$

Example

Tre mængder A, B, C .

Find følgende: $(A \cup B) \cap C$

Hvad der er i A eller B , og den del af det, som også er i C .

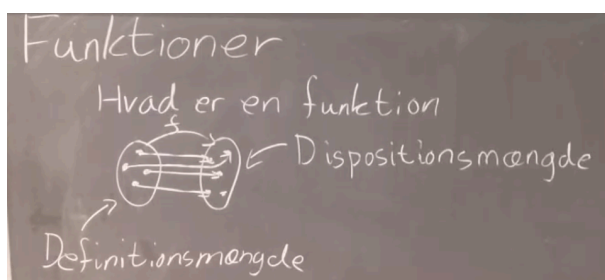
For opgaven:

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, 2\} \\ B &= \{1, 2, 3\} \\ C &= \{3, 4, 5\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \text{hvad der er i } A \text{ eller } B \text{ så tal fra } 0-3 \\ (A \cap B) \cup C &= \text{Hvad der er i både tal fra } 0-3 \text{ og i } 3, 4, 5 \text{ så } 3 \\ (A \cap B) \cup C &= \{3\} \end{aligned} \quad (6)$$

Funktioner

Hvad er en funktion? Kan kaldes en matematisk process, som tager et element fra en mængde, og afbilder over på et element i en anden mængde.



$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned} \quad (7)$$

Værdimængden:

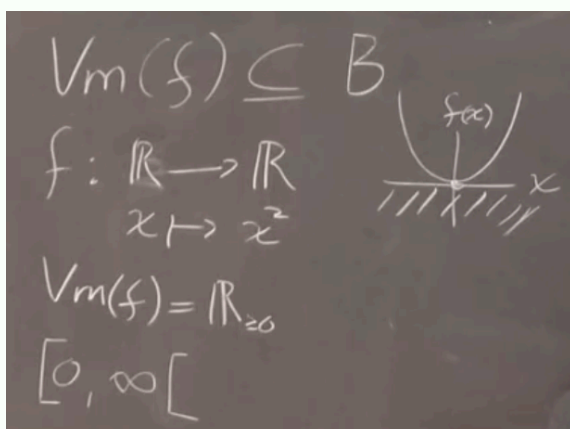
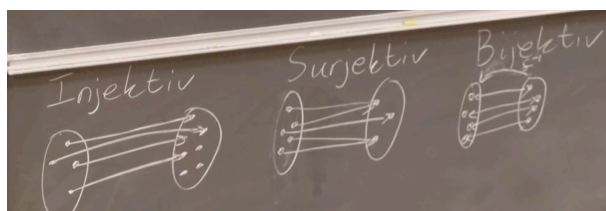
$$Vm(f), f(A)$$

Værdimængden er alle værdier $f(a)$ kan blive (alle elementer, der bliver ramt i dispositions-
mængden)

$$Vm(f) \subseteq B$$

Example

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \quad (8)$$

**Injektive, surjektive og bijektive funktioner****Injektiv**

Alle elementer i dispositionsmængden må kun rammes én gang. Dispositions-
mængden her kan være større en værdimængden

Surjektiv

Alle elementer i dispositionsmængden skal rammes. Elementerne i dispositions-
mængden må gerne rammes flere gange.

Bijektiv

En funktion, der både er injektiv og surjektiv. Dvs. alle elementer i definitions-
mængden skal pege på ét element i dispositionsmængden, og ét unikt element.

Notér her at hvis man tager den inverse funktion (hvor man vender pilen om), vil den inverse
funktion stadig være bijektiv. Det gælder kun for bijektive funktioner, og ikke de andre.

Inverse funktion

$$\begin{aligned}
 f &: A \rightarrow B \\
 a &\mapsto f(a) \\
 f^{-1}/g &: B \rightarrow A \\
 f(a) &\mapsto a
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 f \circ f^{-1} &= f(f^{-1}(x)) = f(g(x)) = \text{id}_B \\
 f^{-1} \circ f &= f^{-1}(f(x)) = g(f(x)) = \text{id}_A
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Lemma (2.2.2)

En funktion har en invers hvis og kun hvis den er bijektiv

For inverse funktioner gælder ($f(x)$ er funktion, $g(x)$ er dens inverse):

$$\begin{aligned}
 f(g(x)) &= \text{id}_{\mathbb{R}} \\
 g(f(x)) &= \text{id}_{\mathbb{R}}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Example

$$\begin{aligned}
 f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto 3x - 7
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Find en invers funktion f^{-1}

Solution:

Opstil funktion: $f(x) = 3x - 7$

Byt om på x og y ($f(x)$)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x - 7 \\
 x &= 3y - 7 \Leftrightarrow \\
 y &= \frac{x + 7}{3} = g(x)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 f(g(x)) &= x \left(\frac{x + 7}{3} \right) - 7 = x \\
 g(f(x)) &= \frac{(3x - 7) + 7}{3} = x
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Example

$$\begin{aligned}
 f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto x^2
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Solution:

Er ikke injektiv da f.eks. $f(-1)$ og $f(1)$ giver det samme
Er heller ikke surjektiv da der ikke fås nogle negative værdier.

Hvad med

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Solution:

Er Injektiv, da x kun må være positiv, og der er ikke 2 positive x-værdier, hvis x^2 giver det samme

Hvad med

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Solution:

Er surjektiv, da alle positive tal bliver ramt, og du i dispositionsmængden ikke længere har de negative. Er ikke injektiv da du stadig har at $f(-1) = f(1) = 1$

Hvad med

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{18}$$

Solution:

Er bijektiv, på grund af det samme som de to sidste to eksempler sat sammen.

Derfor findes k^{-1}

$$\begin{aligned} k^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{19}$$

Note

For $\sqrt{x}$ definerer vi kun svaret som det positive.

Men for $x^2 = 4$ defineres ± 2 som svaret.

Example

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{2x} \\
 x &= e^{2y} \\
 \ln(x) &= \ln(e^{2y}) \\
 \ln(x) &= 2y \\
 y &= \frac{\ln(x)}{2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Note

For inverse funktioner, skal man huske at sørge for, at $f \circ f^{-1}$ skal give id_A og $f^{-1} \circ f = \text{id}_B$

Identitetsfunktionen

$$\begin{aligned}
 \text{id} : A &\rightarrow A \\
 x &\mapsto x
 \end{aligned} \tag{21}$$

Funktionen, der basically ikke gør noget.

Sammensatte funktioner

$$f : A \rightarrow B \quad g : B \rightarrow C \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 f \circ g &: A \rightarrow C \\
 f \circ g &= f(g(x))
 \end{aligned} \tag{23}$$

Komplekse tal $\mathbb{C}$

Er en mængde af tal, hvor vi tillader et tal i , som er løsningen til ligningen $i^2 = -1$

Det gør, at man kan tage kvadratroden af negative tal. $i = \sqrt{-1}$

Bruger normalt Z til at beskrive dem.

Rektangulær form:

$$Z = a + ib$$

Regulære del: $\text{Re}(Z) = a$

Imaginære del: $\text{Im}(Z) = b$

Polær form:

$$Z = |Z| \cdot e^{i \cdot \arg(Z)}$$

Kan betragte dem som funktioner:

$$Z_1 = (a_1 + ib_1), Z_2 = (a_2 + ib_2) \tag{24}$$

hvor man kan lægge dem sammen:

$$Z_1 + Z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \quad (25)$$

Gange dem sammen:

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 \\ &= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 - b_1 b_2 \end{aligned} \quad (26)$$

Gange sammen på polære form:

$$\begin{aligned} Z_3 &= |Z_3| e^{i \arg(Z_3)}, Z_4 = |Z_4| e^{i \arg(Z_4)} \\ Z_3 \cdot Z_4 &= |Z_3| |Z_4| e^{i(\arg(Z_3) + \arg(Z_4))} \end{aligned} \quad (27)$$

Definition (Eulers formel)

$$\begin{aligned} e^{iv} &= \cos(v) + i \sin(v) \\ |Z| e^{i \arg(Z)} &= |Z| \cos(\arg(Z)) + i |Z| \sin(\arg(Z)) \end{aligned} \quad (28)$$

Definition (4.3.1: Fra rektangulær til Polær)

Længden/Absolutværdien af et komplekst tal er:

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(Z)^2 + \operatorname{Im}(Z)^2} \quad (29)$$

Bruger pythagoras.

Argumentet:

$$\operatorname{Arg}(Z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{for } a \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } a = 0 \wedge b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{for } a < 0 \wedge b \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for } a = 0 \wedge b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{for } a < 0 \wedge b < 0 \end{cases} \quad (30)$$

Argument ($\arg(Z)$) er hovedargumentet (vinklen fra $0 - 2\pi$) plus 2π gange noget.

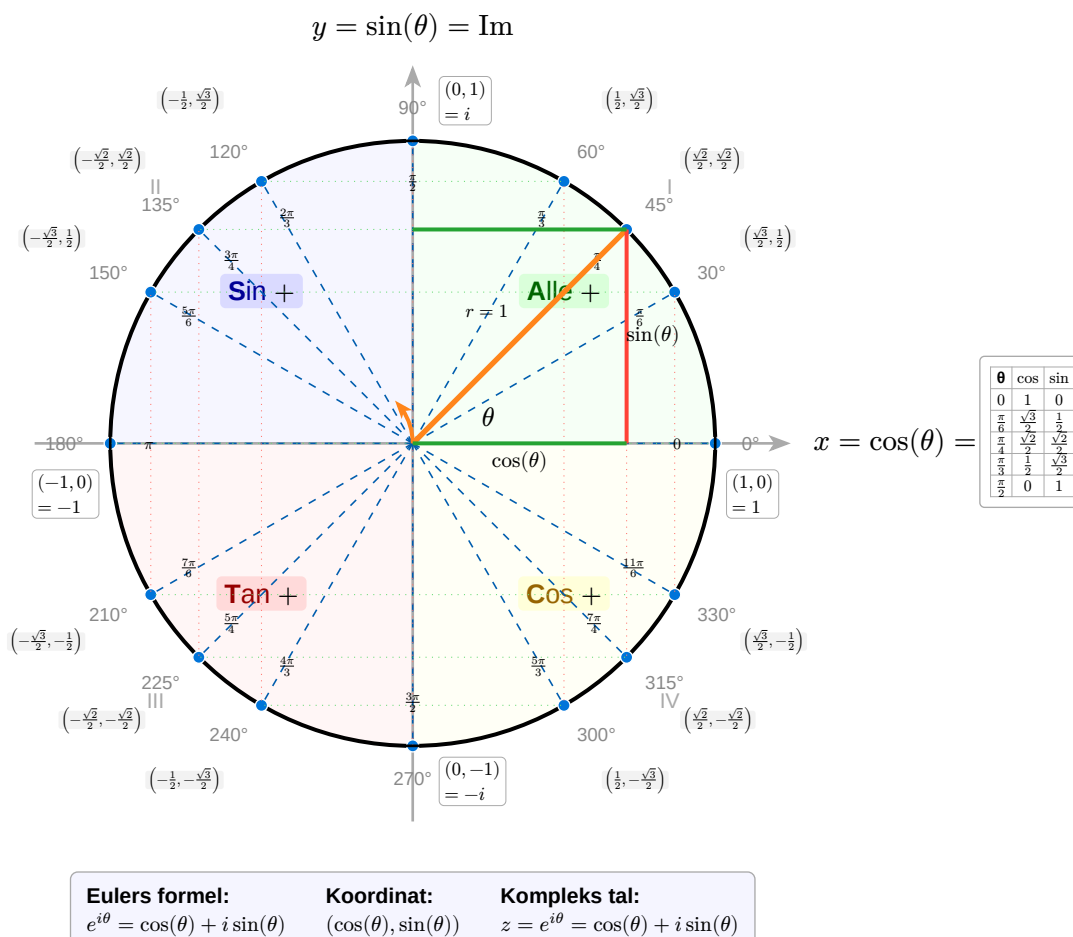


Figure 1: Den Komplette Enhedscirkel - Trigonometri, Komplekse Tal og Koordinater

Note**Sådan læser du enhedscirklen:**

1. **Vinklen θ** måles fra den positive x -akse (mod uret er positiv)
2. **Koordinaterne** (x, y) på cirklen er $(\cos(\theta), \sin(\theta))$
3. **Komplekst tal:** Punktet svarer til $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$
4. **CAST-reglen** fortæller hvilke funktioner er positive:
 - **Kvadrant I** ($0^\circ - 90^\circ$): Alle positive
 - **Kvadrant II** ($90^\circ - 180^\circ$): Kun **Sin** positiv
 - **Kvadrant III** ($180^\circ - 270^\circ$): Kun **Tan** positiv
 - **Kvadrant IV** ($270^\circ - 360^\circ$): Kun **Cos** positiv
5. **Huske-værdier:** $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$, $\frac{1}{2} = 0.5$

Mulige former for komplekse tal til eksamen**Lemma (4.6.1)**

$$e^Z = w \quad (31)$$

$Z \in \mathbb{C}$ skal findes
 $w \in \mathbb{C}$ er givet.

$$Z = \ln(|w|) + i(\text{Arg}(w) + 2p\pi), p \in \mathbb{Z} \quad (32)$$

Important

Angiv altid $p \in \mathbb{Z}$ for at få fuld point

Example

$$\begin{aligned} e^Z &= \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ w &= \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ |w| &= \sqrt{2+2} = 2 \\ \text{Arg}(w) &= \frac{\pi}{4} \\ Z &= \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2p\pi\right), p \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (33)$$

Binome ligninger (binomier)

Er et polynomium $Z^n = w$

$Z, w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$Z = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i\left(\frac{\text{arg}(w)}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}, p = \{0, \dots, n-1\} \quad (34)$$

Example

$$\begin{aligned} Z^3 &= -i \\ n &= 3 \\ w &= -i, |w| = 1 \\ \text{Arg}(w) &= -\frac{\pi}{2} \\ Z &= \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + p\frac{2\pi}{3}\right)}, p \in \{0, 1, 2\} \\ Z &= 1e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + p\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + p\frac{2\pi}{3}\right)}, p = \{0, 1, 2\} \\ Z &= e^{-\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{-\frac{5\pi}{6}i} \end{aligned} \quad (35)$$

Polynomier

$$\begin{aligned} P(Z) &= a_0 Z^0 + a_1 Z^1 + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n \\ &= a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n \end{aligned} \quad (36)$$

Hvis $a_n \neq 0$ kaldes det et n 'te grads polynomie.

Rødder

Tal λ så $P(\lambda) = 0$

Definition (Sætning 5.6.1: Algebraets fundamentalsætning)

Et n 'te grads polynomie har n komplekse rødder regnet med multiplicitet.

Man kan omskrive alle polynomier som et produkt af førstegradspolynomier.

Hvis $p(z)$ har rødder $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, kan det omskrives til:

$$P(z) = a_n (z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n) \quad (37)$$

eller med multiplicitet:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n (z - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_j)^{m_j} \\ \lambda_1 &\neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_j \end{aligned} \quad (38)$$

og $m_1 + \dots + m_j = n$

m_k kaldes den algebraiske multiplicitet af λ_k

Hvordan finder man rødder

For $n = 1$: $P(z) = a_0 + a_1 z = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{a_0}{a_1}$

For $n = 2$: $P(z) = c + bz + az^2 \Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, D = b^2 - 4ac$

Hvis $D < 0$: $\lambda = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

Note

Man kan muligvis få opgaver, hvor man skal gætte en rod ved $n > 2$. Her er den typisk mellem -2 og 2

Divisionsalgoritmen

Example

$P(z) = 2z^3 - 2z^2 - 8z - 12$ givet

$p(3) = 0$ også givet.

Find alle rødder:

Solution:

Vi ved at:

$$P(z) = (z - 3)q(z) \quad (39)$$

Bruger divisionsalgoritmen til at finde $q(z)$

$$\begin{array}{r} z-3 \overline{) 2z^3 - 2z^2 - 8z + 12} \\ \underline{2z^3 - 6z^2} \\ 0z^3 + 4z^2 - 8z + 12 \\ \underline{4z^2 - 12z} \\ 0z^2 + 4z - 12 \\ \underline{4z - 12} \\ 0 \end{array}$$

Resten ved divisionsalgoritmen skal være 0, ellers er det ikke en rod.

Alle $P(z) \in \mathbb{R}[Z]$ så kan det skrives som produkt af reelle første- og andengradspolynomier.

Matricer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 + c_1 b_2 & a_1 c_2 + c_1 d_2 \\ a_1 b_2 + d_1 b_2 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

Når man ganger matricer sammen skal den anden matrix have samme mængde rækker som den første søjler.

Note

Når der står $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ er m antal søjler (hvor mange tal nedad) og n er antal rækker (hvor mange tal til højre)

Søjlevektor

$$\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (43)$$

Lineært ligningssystem

Mængde af lineære ligninger

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad (44)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} :$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (45)$$

Gauss elimination

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A} | \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{array} \right] \quad (46)$$

Reduceret trappeform:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1x_1 + 0x_2 = 0, x_1 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 = 0, x_2 = 0 \end{array} \quad (47)$$

Example

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Solution:

$$x_1 - 4x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = t, x_1 = 1 + 4t$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + 4t \\ t \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (50)$$

Induktion

Ideen er, at vi viser to ting:

$$\begin{cases} P(1) \text{ holder} \\ \text{For alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2} P(n-1) \Rightarrow P(n) \end{cases} \quad (51)$$

Kan også forskydes (så vis $P(2)$ holder og $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$)

Example

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (52)$$

Basis (holder):

$$\sum_{k=1}^1 k = 1, \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad (53)$$

Induktionshypotese:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1) \cdot n}{2} \quad (54)$$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + \underbrace{(n-2) + (n-1)}_{\sum_{k=1}^{n-1} k} + n \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k &= \sum_{k=1}^{n-1} k + n \\
&= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{2n}{2} \\
&= \frac{(n-1)n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned} \tag{56}$$

Så hypotesen holder.

Example $((S_1, S_2, \dots))$

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 1 \\ 2 \cdot S_{n-1} + 1 & \text{for } n \geq 2 \end{cases} \text{ for } n \in \mathbb{N} \tag{57}$$

Vis at $S_n = 2^n - 1$

Basis:

$$n = 1, S_1 = 1, 2^1 - 1 = 1$$

Induktionshypotese:

Antag, at der for et vilkårligt $n \geq 2$ gælder $S_{n-1} = 2^{n-1} - 1$

$$\begin{aligned}
S_n &= 2S_{n-1} + 1 \\
&= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\
&= 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1
\end{aligned} \tag{58}$$

Example

$$\sum_{k=2}^n 2^k = 2^{n+1} - 4 \text{ for alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \tag{59}$$

Basis: $n = 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^2 2^k &= 2^2 = 4 \\
2^{2+1} - 4 &= 8 - 4 = 4
\end{aligned} \tag{60}$$

Induktion: for $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$\sum_{k=2}^{n-1} 2^k = 2^{(n-1)+1} - 4 = 2^n - 4 \tag{61}$$

Betragt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n 2^k &= \sum_{k=2}^{n-1} 2^k + 2^n \\
 &= 2^n - 4 + 2^n \\
 &= 2 \cdot 2^n - 4 \\
 &= 2^{n+1} - 4
 \end{aligned} \tag{62}$$

Example

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{for } n = 1 \\ \sqrt{2 + 3 \cdot a_{n-1}} & \text{for } n \geq 2 \end{cases} \tag{63}$$

Vi vil vise, at $a_n < 4$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Basis: $n = 1$

$$a_1 = 2 < 4$$

Induktion: $a_{n-1} < 4$ for $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Betrakt:

$$a_n = \sqrt{2 + 3a_{n-1}} < \sqrt{2 + 3 \cdot 4} = \sqrt{2 + 12} = \sqrt{14} < \sqrt{16} = 4 \tag{64}$$

Note

Hvis $x < y$, så $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

Example

For alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, vis at $n! \geq 2^{n-1}$

Basis: $n = 4$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, 2^{4-1} = 2^3 = 8 \text{ Holder}$$

Induktion: Antag for $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ at $(n-1)! \geq 2^{n-1-1} = 2^{n-2}$

Betrakt

$$\begin{aligned}
 n! &= n \cdot (n-1)! \\
 &\geq n \cdot 2^{n-2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^{n-1} \geq 2^{n-1}
 \end{aligned} \tag{65}$$

Fordi vi ved at $\frac{1}{2}n \geq 1$, må $\frac{1}{2}n \cdot 2^{n-1}$ være større end $1 \cdot 2^{n-1}$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vis at $A = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Basis: $n = 1$

$$A^1 = A, \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Induktion:

Antag $A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ for $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Betragt

$$\begin{aligned} A^n &= A^{n-1} \cdot A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 + 2(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{66}$$

Lineære algebra

Vektorrum

Example

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Start med at finde en ordnet basis for V

$$[v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{67}$$

(v_1, v_2) er en ordnet basis for V .

Dimensionen for den ordnet basis er antal vektorer i den ordnet basis (her 2).

Opskriv lineær kombination for vektoren der ikke er i ordnet basis:

$$v_3 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$$

Definition (Sætning 9.2.1)

Sæt vektor sammen til en matrice, få den på reduceret trappeform. I de søjler der er pivotelementer, er de vektorer der er i den ordnet base.

Definition (Nulrummet)

Alle de $x \in \mathbb{R}^n$ således at $A \cdot x = 0$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$rref([A \ 0]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_3$$

$$x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker(A), t \in \mathbb{R} \quad (69)$$

$$\ker(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (70)$$

Søjlerummet:

$A \cdot x = b$ hvor x kan variere frit, hvad kan b så være?

$$\text{colsp}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Polynomiumrum

$$W = \{a + bZ \mid a, b \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}[Z] \quad (71)$$

Vis at W er et underrum.

Lemma (10.4.2)

Altid skriv, at du bruger Lemma 10.4.2 til eksamen.

Lad V være et vektorrum over $\mathbb{F}$ og W en delmængde af V , **der ikke er tom**. Da er W et underrum i V , hvis følgende er opfyldt:

for alle $u, v \in W$ og alle $c \in \mathbb{F}$ gælder der, at $u + c \cdot v \in W$ (72)

$$u = a_1 + b_1 Z$$

$$v = a_2 + b_2 Z$$

Betragt

$$\begin{aligned} u + \alpha \cdot v &= (a_1 + b_1 Z) + \alpha(a_2 + b_2 Z) \\ &= a_1 + b_1 Z + \alpha a_2 + \alpha b_2 Z = \underbrace{(a_1 + \alpha a_2)}_{a \in \mathbb{C}} + \underbrace{(b_1 + \alpha b_2)}_{b \in \mathbb{C}} Z \end{aligned} \quad (73)$$

Example

$$W_0 = \{a + Z \mid a \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}[Z]$$

Vis at W_0 **ikke** er et underrum, bruger vi Lemma 10.4.2.

$$\begin{aligned} u &= 1 + Z \in W_0 \\ u + u &= 1 + Z + 1 + Z = 2 + 2Z \notin W_0 \end{aligned} \quad (74)$$

Er ikke et underrum da det kun er et underrum hvis du har $1 \cdot Z$ men vi har her $2 \cdot Z$

Basis

Definition

$\beta = \{1, Z, Z^2, Z^3, \dots, Z^n\}$ er lineært uafhængige, og enhver delmængde er også lineært uafhængig.

Example

$$W = \{a + bZ \mid a, b \in \mathbb{C}\}, \beta = \{1, Z\}$$

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot Z = 0 + 0 \cdot Z \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\gamma = (4 + Z, 2 + 3Z)$$

To krav fra definition 10.2.4:

Hvis antal uafhængige baser er det samme som dimensionen, er de lineært uafhængige og er en ordnet basis.

$$1) \quad c_1(4 + Z) + c_2(2 + 3Z) = 0 [\Rightarrow c_1 = c_2 = 0]$$

$$\begin{aligned} &4c_1 + c_1 Z + 2c_2 + 3c_2 Z = 0 \\ &= (4c_1 + 2c_2) \cdot 1 + (c_1 + 3c_2)Z = 0 \\ &4c_1 + 2c_2 = 0 \\ &c_1 + 3c_2 = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Totalmatrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

så $c_1 = 0$ og $c_2 = 0$

Fordi $c_1 = 0$ og $c_2 = 0$ må γ være lineært uafhængige.

2) For $u \in W$ så $u = a + bZ$.

Vi vil vise, at der findes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ således at $c_1(4 + Z) + c_2(2 + 3Z) = a + bZ$

a, b er givet i opgaven, så de kendes.

$$\begin{aligned} (4c_1 + 2c_2) + (c_1 + 3c_2)Z &= a + bZ \\ 4c_1 + 2c_2 &= a \\ c_1 + 3c_2 &= b \end{aligned} \quad (77)$$

Totalmatrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & a \\ 1 & 3 & | & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{b}{5} + 3\frac{a}{10} \\ 0 & 1 & | & 2\frac{b}{5} - \frac{a}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{b}{5} + 3\frac{a}{10} \\ c_2 &= 2\frac{b}{5} - \frac{a}{10} \end{aligned} \quad (78)$$

Lineære afbildninger

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 + x_2 \quad (79)$$

Example

f er lineær hvis $f(x + y) = f(x) + f(y)$ og $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$

1) $x, y \in \mathbb{R}^2$ så vil $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + f(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (80)$$

2) $f\left(c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right), c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f\left(c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right) \\
 &= cx_1 + cx_2 = c(x_1 + x_2) \\
 &= c \cdot f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)
 \end{aligned} \tag{81}$$

Example

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot x_2 \tag{82}$$

g er **ikke** lineær.

$$2) \ g\left(c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right), c \in \mathbb{R}$$

Lemma (11.3.3)

$$L : V_1 \rightarrow V_2$$

$$\beta = (v_1, \dots, v_n) \text{ for } V_1$$

$$\gamma = (w_1, \dots, w_n) \text{ for } V_2$$

$${}_{\gamma}[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} [L(v_1)]_{\gamma} & [L(v_2)]_{\gamma} & \dots & [L(v_n)]_{\gamma} \end{bmatrix} \tag{83}$$

1) Voldregn $L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_n)$

2) Find: $[L(v_1)]_{\gamma}$. **Altså løs:** $L(v_1) = c_1^{(1)}w_1 + \dots + c_n^{(1)}w_n$ for alle v

$$3) \ {}_{\gamma}[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} c_1^{(1)} & c_1^{(2)} & \dots & c_1^{(n)} \\ c_2^{(1)} & c_2^{(2)} & \dots & c_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m^{(1)} & c_m^{(2)} & \dots & c_m^{(n)} \end{bmatrix}$$

Example

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 + x_2 \tag{84}$$

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ for } \mathbb{R}^2 \text{ og } \gamma = 3 \text{ for } \mathbb{R}$$

$$1) \ f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2, f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\left[f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right]_{\gamma} = c_1^{(1)}3 = 2 \Rightarrow c_1^{(1)} = \frac{2}{3}$$

$$2) \ \left[f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right]_{\gamma} = c_1^{(2)} = 0 \Rightarrow c_1^{(2)} = 0$$

$$3) \ {}_{\gamma}[f]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Example

$${}_{\gamma}[f]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Hvad er $V_m(f)$? Find søjlerummet.

$$\text{rref}\left({}_{\gamma}[f]_{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_m(f) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 3 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\frac{2}{3}t \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

Det er alle reelle tal ganget med $\frac{2}{3}$, men det er også bare reelle tal, så $V_m(f) = \mathbb{R}$

Den er surjektiv fordi dispositionsmængden er det samme som billedet.

f er injektiv hvis og kun hvis $\ker(f) = \{0\}$ (og f er lineær)

Derfor, find nulrummet. $\text{rref}\left({}_{\gamma}[f]_{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x_1 = 0$ dvs.

$$\underbrace{{}_{\gamma}[f]_{\beta} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}}_{=t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = 0 \text{ for alle } t \in \mathbb{R}$$

$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$. Tilbage til normale koordinater.

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ så } \ker(f) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en ordnet basis for kernen. Dimensionen af kernen er 1, så den er ikke tom, aka. f er ikke injektiv

Egenverdier

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ har egenverdier λ , som opfylder $A \cdot v = \lambda \cdot v$

Finder egenverdierne $\det(A - \lambda I_n)$

Finder vektorene/egenrum (E_j, v_j) ved: $\ker(A - \lambda_j I_n)$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

$P(Z) = (1-Z)^2 - 4$ er det karakteristiske polynomium

Egenrum:

$$E_{-1} = \ker(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}_2) = \ker\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = t, v_1 = -t \quad (85)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad (86)$$

Algebraisk multiplicitet:

$\text{am}(\lambda)$ multiplicitet af λ i $P(z)$

$$\begin{aligned} \text{gm}(\lambda) &= \dim(E_\lambda) \\ 1 &\leq \text{gm}(\lambda) \leq \text{am}(\lambda) \end{aligned} \quad (87)$$